Université Sidi Mohamed Bno Abdellah
Ecole Supérieure de Technologie
Fès

Filière : Gmp
Module : Statistiques et Probabilités
Année universitaire :2018-2019
Semestre : S_2

Par :
Monsieur : EL Omari M'hamed
Professeur à EST Fès.

Notions de probabilités

Avertissement et conseil :
Ce document est incomplet, il ne comprend ni l'intégralité du cours, ni les applications , ni les exemples, ni le travail pédagogique indispensable pour le comprendre. L'étudiant est tenu d'assister aux séances de cours

Table des matières

Introduction

Le but des probabilités est d'essayer de rationaliser le hasard : quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ?
Quelles chances ai-je d'obtenir "pile" en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir "6" en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?

Le calcul des probabilités est la science qui modélise les phénomènes aléatoires. Une modélisation implique donc certainement une simplification des phénomènes, mais cette simplification conduit à une quantification, donc à la possibilité de faire des calculs et à prédire.
La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude d'expériences dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude.

Chapitre 1

Dénombrement

I Cardinal d'un ensemble

Dénombrement d'un ensemble (un événement) est le calcul de son cardinal. Le cardinal d'un événement A est le nombre de résultats (éléments) qui sont contenus dans l'événement A, et on le note $card(A)$ ou $|A|$

Exemple **:**

On lance une pièce de monnaie. Les résultats possibles sont P et F. Alors , on a $\Omega = \{P, F\}$; alors $Card(\Omega) = 2$.

Proposition **:**

- $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$, si $A \cap B = \varnothing$
- $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$
- $Card(A \setminus B) = Card(A) - Card(A \cap B)$ où $A \setminus B = \{x \in A \ \ et \ \ x \notin B\}$
  $A \setminus B$ est appelé différence simple entre A et B.

II Principe fondamental du dénombrement

Exemple 1 **:**

Dans un restaurant, le menu du jour est composé de deux plats. Un client a le choix entre trois entrées (salade mêlée, terrine ou gaspacho) et deux plats principaux (tranche de bœuf ou filet de sole). Combien de menus différents peut-on composer dans ce restaurant ?

Solution :

Principe fondamental(Principe du produit) :

Dans une expérience, on a : r choix.
Si le premier choix se produit de n_1 façons différentes
Si le deuxième choix se produit de n_2 façons différentes
.
.
.
Si le $r^{ième}$ choix se produit de n_r façons différentes
Alors il y a au total $n_1 \times n_2 \times ... \times n_r$ résultats possibles pour cette expérience.

Exercice :

On considère les chiffres 2 ;3 ;4 ;6 ;7

1. Combien de nombres de trois chiffres peut on former des chiffres précédents ?
2. Combien de nombres de trois chiffres différents, deux à deux, peut on former des chiffres précédents ?
3. Combien de nombres paires de trois chiffres peut on former des chiffres précédents ?

Solution :

III Arrangements sans répétition

Dans la question 2 de l'exercice précédent, chaque nombre formé est un arrangement sans répétition de 3 éléments patmi 5.
Dans la question 1 de l'exercice précédent, chaque nombre formé est un arrangement avec répétition de 3 éléments patmi 5.

Définition 1 :

Un arrangement est une collection de k objets distincts pris successivement parmi n objets en tenant compte de l'ordre d'apparition. Le nombre d'arrangements sans répétition de k éléments parmi n est noté A_n^k, et qui est :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1).(n-2)...(n-k+1) \quad k \leq n$$

Exemple :

1. Avec les lettres du mot $AMPHI$, combien de mots différents de trois lettres peut on former ?

2. Combien de drapeaux de trois couleurs peut-on créer avec 8 couleurs différents ?
3. Combien y a-t-il d'arrivées différentes pour un tiercé avec 12 partants ?

Solution :

IV Arrangements avec répétition

Définition :

Si, parmi n éléments distincts, on choisit k éléments distincts ou non (on peut choisir plusieurs fois le même élément) en les classant dans un ordre particulier, on forme un arrangement avec répétition (de k éléments parmi n). Le nombre d'arrangements avec répétition est n^k.
En effet, le premier élément peut être choisi parmi n possibles, le deuxième parmi n, le troisième parmi n, et le k-ième parmi n.

Exemple :
Un code pin de téléphone portable est une liste de 4 chiffres pris dans l'ensemble $\{0, 1, 2, ..., 9\}$. Comme on tient compte de l'ordre et les répétitions sont autorisées, alors un code pin est un arrangement avec répétition de 4 éléments parmi 10. Alors le nombre de code pin ,qu'on peut construire avec les 10 chiffres, est 10^4.

V Permutation sans répétition

Définition :

Une permutation sans répétition est un arrangement de n objets distincts parmi n.
Le nombre de permutations de n objets tous distincts est $n!$.

Exemple :
1. Combien d'anagrammes du mot $LAIT$ (même sans signification) peut-on former ?
2. Combien de dispositions de 5 personnes peut-on faire sur un banc de 5 places ?

Solution :

VI Permutation avec répétition

Définition :

Si on classe dans un ordre particulier n éléments dont n_1 sont identiques de type 1, n_2 identiques de type 2, . . . , n_p identiques de type p $(n_1 + n_2 + ... + n_p = n)$, on forme une permutation avec répétitions (de ces n éléments). Le nombre des permutations avec répétition est $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times ..... \times n_p!}$

Exemple :

1. Le nombre d'anagrammes du mot $ECONOMIE$ est $\dfrac{8!}{2! \times 2!}$
2. Le nombre d'anagrammes du mot $STATISTIQUES$ est $\dfrac{12!}{3! \times 3! \times 2!}$
3. Le nombre de permutations des chiffres $1; 1; 1; 3; 3; 5; 6; 6; 6; 6$ est $\dfrac{10!}{4! \times 2! \times 3!}$

VII Combinaison

Définition :

Une combinaison est une collection de p objets pris simultanément parmi n objets, donc sans tenir compte de l'ordre d'apparition.

- Une combinaison est dite sans répétition si on ne peut prendre chaque objet qu'une seule fois au plus. Le nombre de combinaisons sans répétition, noté C_n^p, est : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$ $p \leq n$
- Une combinaison est dite avec répétition si on peut prendre chaque objet plusieurs fois. Le nombre de combinaisons avec répétition, noté K_n^p, est : $K_n^p = C_{n+p-1}^p = \dfrac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

Exemples :

- Le nombre de comités différentes de 5 personnes dans une classe de 20 personnes qu'on peut former est C_{20}^5 car chaque comité est une combinaison sans répétition de 5 personnes parmi 20.
- Les combinaisons avec répétition que l'on peut faire avec 2 éléments choisis parmi les 3 éléments a, b et c sont : $\{a, a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, c\}$. Le nombre de ces combinaisons est : $K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$.

VIII Coefficients binomiaux

Les coefficients C_n^k sont encore appelés coefficients binomiaux. Ils peuvent être calculés seulement si $k \leq n$.

Propriétés :

1. Si k est strictement supérieur à n, on convient que dans ce cas $C_n^k = 0$.
2. Symétrie : Pour tout entier n et tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $C_n^{n-k} = C_n^k$.
   Conséquence : $C_n^0 = C_n^n = 1$ et $C_n^{n-1} = C_n^1 = n$
3. Relation de Pascal : $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Exercies

***Exercice 1* :**
Un sac contient 10 boules : 3 vertes et 7 jaunes.
A) On tire successivement et au hasard 4 boules du sac sans remettre la boule tirée. Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :
1. 4 boules jaunes
2. 4 boules vertes ;
3. 3 jaunes et 1 verte dans cet ordre ;
4. 3 jaunes et une verte ;
5. 2 jaunes et deux vertes dans cet ordre ;
6. deux jaunes et deux vertes ;
7. au moins 3 vertes ;
8. au plus 3 jaunes.

B) On tire successivement et au hasard 4 boules du sac avec remise de la boule tirée. Répondre aux mêmes questions précédentes.
C) On tire simultanément et au hasard 4 boules du sac. Répondre aux mêmes questions précédentes.

***Exercice 2* :**
Quatre garçons et deux filles s'assoient sur un banc.
1. Quel est le nombre de dispositions possibles ?
2. Même question si les garçons sont d'un côté et les filles de l'autre.
3. Même question si chaque fille est intercalée entre deux garçons.
4. Même question si les filles veulent rester l'une à côté de l'autre

***Exercice 3* :**
Au service du personnel, on compte 12 célibataires parmi les 30 employés. On désire faire un sondage : pour cela on choisit un échantillon de quatre personnes dans ce service.
1. Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
2. Quel est le nombre d'échantillons ne contenant aucun célibataire ?
3. Quel est le nombre d'échantillons contenant au moins un célibataire ?

***Exercice 4* :**
Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

***Exercice 5* :**
On dispose de trois boîtes et de cinq craies de couleur bleue, rouge, jaune, verte et orange.
(Chaque boite peut ne pas contenir aucune craie ; comme elle peut contenir plusieures craies)
1. De combien de façons distinctes peut-on ranger les cinq craies dans les trois boîtes ?
2. Même question en laissant l'une des boîtes vides.
3. Même question si la bleue et la rouge sont rangées ensembles.
4. Même question si la bleue et la rouge sont rangées ensembles, mais seules.

***Exercice 6* :**
On lance trois fois de suite un dé numéroté de 1 à 6 et on note les triplets ainsi obtenus. Combien y a-t-il de tels triplets ? (En tenant compte de l'ordre)

***Exercice 7* :**
Dans un club de sport, 36 membres jouent au tennis, 28 jouent au football et 18 jouent au basketball. En outre, 22 membres jouent au tennis et au football, 12 pratiquent le tennis et le basketball, 9 jouent au football et au basketball et pour finir 4 pratiquent les 3 sports. Combien de membres de ce club pratiquent au moins un des trois sports ?

Chapitre 2

Calcul des probabilités

I Préliminaires

Exemple 1 :
On lance un dé une seule fois, les résultats possibles sont $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Définitions :

- On appellera expérience aléatoire toute action ou processus dont on ne peut prédire avec certitude le résultat.
  Exemple :
  1. Lancer d'une pièce de monnaie ;
  2. Jet d'un ou plusieurs dés ;
  3. Durée d'attente dans un supermarché ;
- Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité
  Dans l'exemple 1 les résultats $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{5\}$; $\{6\}$ sont des éventualités.
- L'ensemble formé par toutes les éventualités est appelé univers, il est très souvent noté Ω.
  Exemple :
  1. On lance une pièce de monnaie. Les résultats possibles sont P et F. Alors , on a $\Omega = \{P, F\}$;
  2. On lance un dé, alors les résultats possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Donc, on a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Un événement d'une expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers,
  Dans l'exemple 1 : soit A"avoir un nombre pair".Alors $A = \{2; 4; 6\}$ est un événement.
- Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un événement élémentaire.
  Dans l'exemple 1 : les événements $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$; $\{4\}$; $\{5\}$; $\{6\}$ sont des événements élémentaires
- L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'événement impossible, noté $\varnothing$,
- L'événement Ω composé de toutes les éventualités est appelé événement certain.
- Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé événement contraire de A
  qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.
  On a en particulier $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.
  Dans l'exemple 1 : si $A = \{2; 4; 6\}$ alors $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$

- Un évènement A est dit réalisé si le résultat de l'expérience appartient à A.
  Exemple : Dans l'exemple 1 : L'évènement $A = \{1, 2, 6\}$ est réalisé si le dé affiche : 1,2 ou 6.
- Si A et B sont des événements, $A \cup B$ est l'évènement qui se réalise lorsque au moins A ou B est réalisé.
- Si A et B sont des événements, $A \cap B$ est l'évènement qui se réalise lorsque A et B sont réalisés simultanément.
- Deux évènements A et B sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément $(A \cap B = \varnothing)$.

II Probabilités

Définition 1 :

On appelle probabilité toute application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0, 1]$ possédant les propriétés suivantes :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont incompatibles $(A \cap B = \varnothing)$,

Ainsi à tout évènement $A \subset \Omega$, on associe le nombre $P(A)$, avec

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Propriétés très importantes :

1. $P(\varnothing) = 0$,
2. Soit A un évènement et $\overline{A}$ son évènement contraire. Alors, on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

Exercice 1 :

Soient A et B deux évènements tels que : $P(A) = \dfrac{1}{7}$, $P(\overline{B}) = \dfrac{1}{5}$ et $P(A \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{8}$. Calculer $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Solution :

Exercice 2 :

On lance une pièce de monnaie sachant que la probabilité d'avoir F est le double de celle d'avoir P. Calculer $p(F)$ et $p(P)$ la probabilité d'avoir F et P.

Solution :

Définition 2 (Système complet d'événements) :

On appelle système complet d'événements tous les ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$ d'événements deux à deux incompatibles, et dont la réunion est Ω.
Autrement dit, $A_1, A_2, ..., A_n$ est un système complet d'événements si et seulement si
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$.
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...... \cup A_n = \Omega$.

Exemple :
Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, les événements $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{4\}$ et $C = \{3, 6\}$ constituent un système complet d'événements. En effet,
- $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ et $B \cap C = \varnothing$.
- $A \cup B \cup C = \Omega$.

Proposition :

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements et P une probabilité sur Ω. Alors, Pour tout événement A on a :

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + ...P(A \cap A_n) = \sum_{j=1}^{n} P(A \cap A_j)$$

Exemple :
Dans une urne, on a des cubes rouges et verts et des boules rouges et vertes. On tire un de ces objets :
Soit A_1 = "L'objet tiré est un cube" et A_2 = "L'objet tiré est une boule".
On note A, l'événement, "l'objet tiré est vert". Pour calculer la probabilité $P(A)$, il suffit de calculer la probabilité que l'objet tiré soit un cube vert et ajouter la probabilité que l'objet soit une boule verte. Donc on peut éventuellement écrire : $P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2)$.

III Cas équiprobabilité

Définition :

Soient Ω un univers de cardinal fini et P une probabilité définie sur Ω.
On dira qu' il y a équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
C à d si on a $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\}$ et $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$ on a $P(\{\omega_j\}) = \dfrac{1}{n}$
On dit que P est une probabilité uniforme.

Proposition :

Soient Ω un univers de cardinal fini et P une probabilité uniforme définie sur Ω. Alors pour tout événement A, on a :

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ total\ de\ cas}$$

Exemples :
1) On lance un dé équilibré, la probabilité d'avoir un nombre pair est :

$$P(\{2,4,6\}) =$$

2) On lance une pièce de monnaie trois fois. La probabilité de l'événement A :"Avoir deux faces" est :

Exercice :
Un groupe composé de 8 hommes et 6 femmes doit désigner 4 de ses membres pour les représenter. Si la désignation se fait au hasard, quelle est la probabilité pour que le groupe des représentant

1. ne comporte que des hommes ?
2. ne comporte que des femmes ?
3. comporte un nombre égal d'hommes et de femmes ?

Solution :

IV Probabilités conditionnelles

Exemple introductif **:**
On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :
- B : "la face obtenue porte un numéro pair" ;
- A : "la face obtenue porte un numéro multiple de 3".

Soit Ω_B l'espace d'echantionnage associé à l'expérience aléatoire dont B se réalise toujours, $\Omega_B = B$ soit $P_B(A)$ la probabilité d'obtenir un numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair (B est réalisé toujours).

$$\begin{aligned} P_B(A) = \frac{1}{3} = \frac{|A_B|}{|B|} & \ (A_B \textit{ est l'événement qui se réalise lorsque } A \textit{ se réalise sachant que } \\ & \qquad B \textit{ soit réalisé}) \\ = \frac{|A \cap B|}{|B|} & \\ = \frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} & \end{aligned}$$

Définition :

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. Soient A et B des événements tels que $P(B) \neq 0$. On appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B**, notée $P(A/B)$ ou $P_B(A)$, la possibilité de réalisation de A sachant que B a été réalisé. Elle est donnée par la formule suivante :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Cette formule est dite **Première formule de Bayes**.

Remarques :

1. On ne peut pas conditionner par rapport à un événement impossible ($P(A/\varnothing)$), car on ne peut pas diviser sur $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$
3. $P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$ (Formule de probabilité composée)
4. On peut généraliser la formule de probabilité composée à :
   $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)...P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{n-1})$.

Exercice :

Parmi les 100 employés d'une entreprise, il y a 60 hommes, 50 diplômés et 40 hommes diplômés. On choisit au hasard un employé de cette entreprise.

1. Calculer la probabilité qu'un homme choisi au hasard soit un diplômé.
2. Calculer la probabilité qu'un diplômé choisi au hasard soit un homme.
3. Calculer la probabilité qu'un diplômé choisi au hasard soit une femme.

Solution :

IV.1 Formule des probabilités totales

Proposition :

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements de Ω tels que $P(A_j) \neq 0$ pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Alors, Pour tout événement A on a :

$$P(A) = P(A/A_1) \times P(A_1) + P(A/A_2) \times P(A_2) + ... + P(A/A_n) \times P(A_n)$$

Démonstration :

Comme A_1, A_2,...,A_n est un système complet d'événements de Ω, alors ,d'après une proposition du cours, on a :

$$P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + ...P(A \cap A_n)$$

Utilisons la première formule de Bayes, $P(A \cap A_j) = P(A/A_j) \times P(A_j)$ pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Alors, on a : $P(A) = P(A/A_1) \times P(A_1) + P(A/A_2) \times P(A_2) + ... + P(A/A_n) \times P(A_n)$

Exemple :

On considère les événements A,B et C tels que

- $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ et $B \cap C = \varnothing$.
- $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ et $P(C) = 0,5$.

Soit D un événement tel que $P(D/A) = 0,3$, $P(D/B) = 0,2$ et $P(D/C) = 0,4$.

1- Montrer que A, B et C constituent un système complet d'événements.

2- Calculer $P(D)$.

Solution :

IV.2 Deuxième formule de Bayes

Proposition :

Soient $A_1, A_2, ..., A_n$ un système complet d'événements de Ω tels que $P(A_j) \neq 0$ pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Alors, Pour tout événement A on a :

$$P(A_j/A) = \frac{P(A/A_j) \times P(A_j)}{P(A/A_1) \times P(A_1) + P(A/A_2) \times P(A_2) + ... + P(A/A_n) \times P(A_n)}$$

Démonstration :

On a :

$$\begin{aligned} P(A_j/A) &= \frac{P(A \cap A_j)}{P(A)} = \frac{P(A/A_j) \times P(A_j)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A/A_j) \times P(A_j)}{P(A/A_1) \times P(A_1) + P(A/A_2) \times P(A_2) + ... + P(A/A_n) \times P(A_n)} \end{aligned}$$

où la dernière étape découle de la formule des probabilités totales.

Exercice :
On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. Il tire ensuite un jeton dans une urne choisie en fonction du résultat du dé.
L'urne A est choisie quand le dé donne 1, 2 ou 3, l'urne B quand on obtient 4 ou 5 et l'urne C quand on obtient 6. Les urnes contiennent les jetons suivants :
urne A : deux jetons rouges, trois jetons bleus ;
urne B : deux jetons bleus, quatre jetons verts ;
urne C : un jeton vert, un jeton rouge.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge par ce procédé ?
2. On obtient un jeton rouge. Quelle est la probabilité que ce jeton soit issu de l'urne A ?
3. On obtient un jeton bleu. Quelle est la probabilité que le lancer du dé ait donné 3 ?

Solution :

V Indépendance

Il arrive parfois que la réalisation de l'événement A n'est pas influencée par la réalisation de l'événement B c'est-à-dire $P(A/B) = P(A)$, dans ce cas A et B sont indépendants.

Définition :

Deux événements A et B sont dits indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

.

Exemple :

- On tire au hasard une carte dans un jeu à 52 cartes. Désignons par A l'événement " la carte tirée est une dame " et par B l'événement " la carte tirée est pique". On a :

$$P(A) = \frac{Nombre\,total\,des\,dames}{Nombre\,total\,des\,cartes} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$
$$P(B) = \frac{Nombre\,total\,des\,piques}{Nombre\,total\,des\,cartes} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$
$$P((A \cap B) = \frac{Nombre\,total\,des\,dames\,piques}{Nombre\,total\,des\,cartes} = \frac{1}{52}$$

Donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, par suite les événements A et B sont indépendants .

Proposition :

Soients A et B deux événements indépendants. Alors, on a :
1- $P(A/B) = P(A)$.
2- A et $\overline{B}$ sont indépendants.
3- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration :

1- Comme A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et par la formule de bayes $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$. Par identification $P(A/B) = P(A)$.
2- Comme A et B sont indépendants, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, en plus

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A) - P(A \cap B) \quad \left(car \;\; (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A \;\; et \;\; (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \varnothing \right) \\ &= P(A) - P(A) \times P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A) \times P(\overline{B}) \end{aligned}$$

En conséquence A et $\overline{B}$ sont indépendants.
3- la démonstration utilise les mêmes arguments que précédemment.

Exercice :

Une urne contient 5 boules rouges et deux blanches. On tire une boule on note sa couleur et on la remet puis on en tire une autre et on note sa couleur.

1. Quelle est la probabilité d'avoir une boule blanche puis une rouge ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une boule blanche ?

Solution :

Exercies

Exercice 1 **:**
Soit une famille de trois enfants, avec l'équiprobabilité des sexes, Calculer la probabilté que :

1. A" L'ainé soit un garçon"
2. B" La famille a deux filles"
3. C" La famille n'a aucune fille"
4. D" Le cadet soit une fille sachant que l'ainé est un garçon"

Exercice 2 **:**
Trois tireurs ciblent un objet. La probabilité que le tireur 1 ; 2 et 3 touche l'objet est respectivement égale à 0,6 ; 0,3 et 0,4. La probabilité que deux tireurs touchent l'objet est 0,2. La probabilité que trois tireurs touchent l'objet simultanément est 0,1.
Calculer la probabilité que l'objet soit touché.

Exercice 3 **:**
Mohammed joue au tennis contre ses parents. La probabilité de gagner un match contre son père est de 1/3, contre sa mère de 2/3. Mohammed joue alternativement contre ses parents en commençant par son père. Il est déclaré vainqueur dès qu'il a gagné deux matches consécutifs. Quelle est la probabilité qu'il soit déclaré vainqueur en jouant au plus quatre matches ?

Exercice 4 **:**
On place dans un sac 5 billets de 5 dh, 7 billets de 10 dh et 10 billets de 20 dh. On choisit au hasard une poignée de 8 billets, chaque billet ayant la même probabilité d'être attrapé.

1. Quelle est la probabilité de n'avoir choisi aucun billet de 5 dh ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu uniquement des billets de 20 dh ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu au moins un billet de chaque valeur ?

Exercice 5 **:**
Un fabricant prépare des films de protection d'écran pour téléphones portables. Il retient trois longueurs pour la diagonale des écrans (et donc pour les films), 4 pouces, 4,7 pouces et 5 pouces. On se limite ici aux possesseurs de téléphones avec ces trois tailles d'écran. Une étude de marché indique au fabricant que les écrans de 4 pouces équipent 30 % des téléphones. Cette étude lui indique aussi que 30 % des possesseurs d'écran 4 pouces ont une protection d'écran. C'est aussi le cas de 25 % des possesseurs d'écran 4,7 pouces et de 40 % des possesseurs d'écran 5 pouces.

1. Sachant que 34 % des possesseurs de téléphone possèdent une protection d'écran, calculer le pourcentage de possesseurs d'écran de 4,7 pouces et de 5 pouces.
2. On considère un possesseur de protection d'écran. Calculer la probabilité qu'il possède un téléphone avec un écran de 5 pouces.
3. On considère maintenant une personne possédant une protection d'écran et dont le téléphone n'a pas un écran de 4,7 pouces. Calculer la probabilité qu'elle possède un téléphone avec un écran de 5 pouces.

Exercice 6 **:**
J'ai dans ma poche trois jetons identiques au toucher : l'un a ses deux faces blanches, le second a ses deux faces noires et le troisième a une face noire et l'autre blanche. Ayant sorti de ma poche un jeton choisi au hasard, je n'en vois qu'une seule face : elle est blanche. Quelle est la probabilité que l'autre face de ce jeton soit blanche également ?

Chapitre 3

Variables aléatoires discrètes

I Généralités

Exemple 1 :
On lance une pièce de monnaie trois fois. Alors $\Omega = \{PPP; PPF; PFP; FPP; PFF; FPF; FFP; FFF\}$
Soit X l'application qui donne, pour chaque élément de Ω, le nombre de "Face" obtenus.

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "X"] & \mathbb{R} \\
PPP \arrow[r] & 0 \\
PPF \arrow[dr] & \\
PFP \arrow[r] & 1 \\
FPP \arrow[ur] & \\
PFF \arrow[dr] & \\
FPF \arrow[r] & 2 \\
FFP \arrow[ur] & \\
FFF \arrow[r] & 3
\end{tikzcd}$$

L'application X est appelée une variable aléatoire sur Ω.
On a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$ appelé ensemble de valeurs de X.

Définition 1 :

Une variable aléatoire sur un univers Ω est ue application X qui associe à tout événement A un nombre réel.

$$X: \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & X(A) \end{array}$$

$X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs de X
Les variables aléatoires sont souvent notées par des lettres majuscules X ; Y ; Z ; ...

Définition 2 :

- Une variable aléatoire X est dite discrète si $X(\Omega)$ est finie ou infini dénombrable : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.
- Une variable aléatoire X est dite continue si $X(\Omega)$ est continue.

Exemple :

- la variable aléatoire de l'exemple 1 est discrète car $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.
- On lance une pièce de monnaie plusieurs fois. Soit X la variable aléatoire qui désigne le nombre de lancements nécessaires pour avoir le premier "F", alors $\Omega =$
et $X(\Omega) =$

Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Prennons l'exemple 1 ; on a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.
Alors $X^{-1}(0) = \{PPP\}$, $X^{-1}(1) = \{PPF, PFP, FPP\}$, $X^{-1}(2) = \{PFF, FPF, FFP\}$ et $X^{-1}(3) = \{FFF\}$ sont des événements de Ω notés respectivement $(X = 0)$, $(X = 1)$, $(X = 2)$, $(X = 3)$.
La probabilité de : $P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 1) = \frac{3}{8}$, $P(X = 2) = \frac{3}{8}$, $P(X = 3) = \frac{1}{8}$.
Récapitulons les résultats dans le tableau suivant :

Valeurs de X : x_i	0	1	2	3
Probabilité : $p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Définition 3 (loi de probabilité d'une variable aléatoire) :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire est entièrement déterminée par les valeurs de la variable aléatoire et des probabilités correspondantes.

Exercice :
On lance deux dés et on définit par S la variable aléatoire qui désigne la somme des deux résultats.

1. Donner $S(\Omega)$
2. Donner la loi de probabilité de S

Solution :

II Paramètres d'une loi de probabilités

Comme pour les distributions statistiques, les lois de probabilités possèdent des paramètres de position et dispersion.

Définition 1 :

L'espérance d'une variable aléatoire X est donnée par : $E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = \sum x_i p_i$
avec $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n; ...\}$
Cette définition rejoint celle de la moyenne en statistique descriptive.

Exemple :
Dans l'exemple 1 précédant, l'espérance de la variable aléatoire X est :

Propriétés :

L'espérance (ou moyenne) d'une variable aléatoire discrète possède les propriétés suivantes :

1. $E(a) = a$ si a est une constante.
2. $E(kX) = kE(X)$ où k est une constante.
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
4. $E(X + a) = E(X) + a$.

Définition 2 :

La variance d'une variable aléatoire X est notée $V(X)$ et définit par :

$$V(X) = E([X - E(X)]^2) = \sum (x_i - E(X))^2 \times p_i$$

Propriété :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = (\sum x_i^2 \times p_i) - [E(X)]^2$$

La variance d'une variable aléatoire X peut s'interpréter comme une mesure de dispersion des valeurs de la variable aléatoire X par rapport à sa valeur moyenne. Si la variance est petite alors les valeurs de la variable aléatoire X sont regroupées dans un petit intervalle autour de la moyenne. si par contre la variance est grande. les valeurs de la variable aléatoire X sont fortement dispersées dans un grand intervalle autour de la valeur moyenne.

Propriétés :

La variance d'une variable aléatoire possède les propriétés suivantes :

1. $V(a) = 0$ si a est une constante.
2. $V(aX) = a^2 V(X)$ où a est une constante.
3. $V(X + a) = V(X)$ où a est une constante.
4. $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont indépendantes. $\Big($$X$ et Y sont dites indépendantes si $P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$ pour tout $i = 1, ..., k$ et $j = 1, ..., l$$\Big)$

Exemple :
Dans l'exemple 1 précédant, la variance de la variable aléatoire X est :

Exercice :
Lors d'un jeu du hasard une personne lance un dé équilibré, et si l'issue est 1,3 ou 4, elle gagne 1000

DHS. Sinon, elle ne gagne rien. Soit X la variable aléatoire qui donne le gain lié à ce jeu.

1. Donner $X(\Omega)$ et la loi de probabilité de X
2. Calculer l'espérance de X, (le gain moyen dans ce jeu)
3. Calculer la variance de X et interpréter le résultat.

Correction :

III Fonction de masse et fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est :

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Définition 1 **:**

La fonction $f:\ \mathbb{R} \to [0,1]$ définie pour chaque $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = P(X = x)$$

s'appelle la fonction de masse de la variable aléatoire X. On peut écrire

$$f(x) = \begin{cases} p_1 & \text{si } x = x_1 \\ p_2 & \text{si } x = x_2 \\ & \vdots \\ p_n & \text{si } x = x_n \\ 0 & \text{si } x \neq x_i \text{ , } i \in \{1, 2, ..., n\} \end{cases}$$

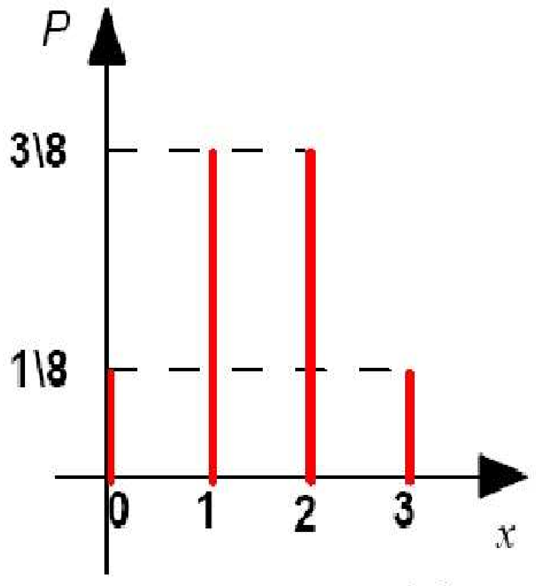
Exemple :

Soit X la variable aléatoire de l'exemple 1 dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

X	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Alors la fonction de masse de X s'écrit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 1 \\ \frac{3}{8} & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{8} & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{si } x \neq 0, 1, 2, 3 \end{cases}$

FIGURE 3.1 – La représentation de la fonction de masse de l'exemple 1 précédent



Définition 2 **:**

Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition F associée à X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

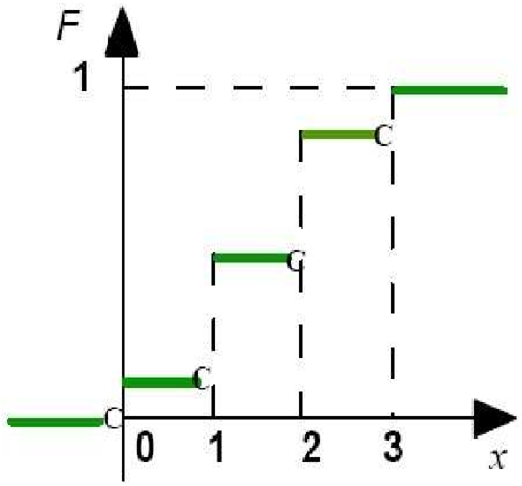
$$F(x) = P(X \leq x)$$

Cette notion rejoint celle des fréquences cumulées croissantes en statistique descriptive.

Exemple :

Avec les mêmes données de l'exemple précédent (exemple 1), on a la fonction de répartition F associée à X est donnée par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{8} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1, 2[\\ \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} & \text{si } x \in [2, 3[\\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1 & \text{si } x \in [3, +\infty[\end{cases}$

Figure 3.2 – La représentation de la fonction de répartition de l'exemple précédent



Propriétés de la fonction de répartition :

En considérant la définition de la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X, on constate que cette fonction jouit des propriétés suivantes :

1. $0 \leq F(x) \leq 1$. La fonction F démarre toujours de 0 et sa valeur maximale est 1.
2. F est croissante, c-à-d si $x \leq y$ alors $F(x) \leq F(y)$.

Exercice :

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 5[\\ 0,4 & \text{si } x \in [5, 6[\\ 0.52 & \text{si } x \in [6, 9[\\ 0.85 & \text{si } x \in [9, 10[\\ 1 & \text{si } x \in [10, +\infty[\end{cases}$

1. Donner $X(\Omega)$ (les valeurs prises par X).
2. Donner la loi de probabilité de la variable X

Correction :

Exercies

Exercice 1 **:**
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement sans remise 5 boules. Soit X le nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X), V(X)$

Exercice 2 **:**
Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'on obtient la première boule blanche. Soit B le nombre de tirages nécessaires.

1. Expliciter la loi de B,
2. Calculer l'espérance et l'écart-type de B.

Exercice 3 **:**
On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. On appelle cela une main.
Si la main contient 4 rois on gagne 100 DH, si la main contient 3 rois, on gagne 50 DH, si la main contient 2 rois, on ne gagne rien et on ne perd rien, si la main contient 1 rois, on perd 10 DH et si la main ne contient aucun roi, on perd 50 DH.
Soit X la variable aléatoire correspondant au gain.

1. Etablir la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 4 **:**
Dans un groupe il y a 20 garçons et 10 filles. On choisit au hasard dans le groupe un comité de 4 membres. On désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre de filles dans le comité.

1. Donner la loi de probabilité de X
2. Calculer E(X) et V(X)
3. Donner la fonction de répartition de X et tracer son graphe
4. Calculer la probabilité de choisir
   a) 2 filles
   b) Au moins 2 filles
   c) Au plus 2 filles

Exercice 5 **:**
Un restaurant propose 7 entrées dont 2 à 8 dh chacune, 4 à 10 dh chacune et une à 12 dh ; 3 plats du jour dont 2 à 20 dh chacun et un à 25 dh ; 5 desserts dont 2 à 8 dh chacun et 3 à 6 dh chacun.
Un client compose son menu.(un menu est composé d'une entrée, d'un plat du jour et d'un dessert)
Soit X le prix du menu ainsi composé

1. Donner la loi de probabilité de X
2. Calculer E(X) et donner sa signification

Exercice 6 **:**
On dispose d'une table de survie relative à un groupe de 1000 personnes nées la même année et survie à partir de leur naissance (âge 0).

Age exprimé en année	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Nombre de survivants à cet âge	1000	850	800	750	720	680	560	380	150	20	0

D'après ce tableau, calculer :

1. La probabilité pour qu'une personne A décède avant l'âge de 40 ans.
2. La probabilité pour elle de décéder à l'âge de 70 ans.
3. La probabilité pour elle de décéder à un âge entre 30 et 60 ans.
4. Calculer l'espérance de vie (durée moyenne d'existence).

Exercice 7 **:**
Un tireur tire 3 coups sur une cible. La probabilité d'atteindre la cible avec un coup est égale à 0.4. Pour chaque coup réussi le tireur gagne 5 points. Soit X le nombre de points gagnés.

1. Donner la loi de probabilité de X
2. Calculer le gain moyen.

Chapitre 4

Lois discrètes usuelles

I Loi Uniforme

Elle modélise des situations d'équiprobabilités.

Définition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme discrète de parametre n lorsqu'elle prend ses valeurs dans $\{1, 2, ..., n\}$ avec des probabilités élémentaires identiques. Puisque la somme de ces dernières doit valoir 1, on en déduit qu'elles doivent toutes être égales à $\frac{1}{n}$:

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ P(X = k) = \frac{1}{n}.$$

Exemples :

1. On lance un dé cubique équilibré à six faces. Soit X la variable aléatoire qui donne le numéro affiché par le dé. La loi de probabilité de X est donnée par :

X	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   C'est la loi Uniforme discrète de paramètre 6.

2. Un sac contient 7 jetons identiques (numérotés de 1 à 7).
   On tire au hasard 1 jeton du sac. Soit Y la variable aléatoire qui donne le numéro affiché sur le jeton.
   La loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

Y	1	2	3	4	5	6	7
p_i	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

   C'est la loi Uniforme discrète de paramètre 7.

Proposition : Paramètres d'une Loi Uniforme :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi Uniforme, Alors on a :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

II Loi de Bernoulli

Définition :

Cette loi est celle de toute variable aléatoire X modélisant une expérience dont l'issue ne possède que deux alternatives de type "succès ou échec", "vrai ou faux", "marche ou arrêt", pile ou face", etc. Un succès est représenté par l'évènement " X = 1" tandis que "X = 0" correspond à un échec ($X(\Omega) = \{0, 1\}$).
On a $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$ où p est la probabilité de l'événement " X = 1".
La relation X suit une Loi de Bernoulli de paramètre p est notée $X \sim Be(p)$.

Exemples :

1. On jette une pièce de monnaie. On considère X la variable aléatoire qui prend 1 si l'issue est Pile et 0 sinon. Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   Le tableau de la loi X est donnée par :

X	0	1
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. Ahmed tire sur un oiseau. La probabilité de succès pour Ahmed est $\frac{1}{3}$. On considère Y la variable aléatoire qui prend 1 si Ahmed touche l'oiseau et 0 sinon. Alors Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.
   Le tableau de la loi Y est donnée par :

Y	0	1
p_i	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Proposition : Paramètres d'une Loi de Bernoulli :

Soit $X \sim Be(p)$, Alors on a :

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p)$$

III Loi binomiale

Définition :

La loi binomiale est la loi de probabilité d'une variable aléatoire représentant une série d'épreuves de Bernoulli possédant les propriétés suivantes :

1. Chaque épreuve donne lieu à deux éventualités exclusives de probabilités constantes p et $q = 1 - p$.
2. Les épreuves répétées sont indépendantes les unes des autres.
3. La variable aléatoire X correspondante prend pour valeur le nombre de succès dans une suite de n épreuves.

La relation X suit une Loi binomiale de paramètres n et p est notée $X \sim B(n; p)$.
Les probabilités élémentaires de la loi binomiale $B(n; p)$ sont données pour tout nombre de succès $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$ par :

$$P(X = k) = C_n^k . p^k . (1 - p)^{n-k}$$

Exemple :

Ahmed tire sur un oiseau 4 fois successives. A chaque fois la probabilité de succès pour Ahmed est $\frac{1}{4} = 0.25$. On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où Ahmed touche l'oiseau. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \dfrac{1}{4}$. Et on a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$
la loi de probabilité de X est donnée par :

$$P(X = 0) = C_4^0.(0.25)^0.(1 - 0.25)^4 = 0,31640625$$
$$P(X = 1) = C_4^1.(0.25)^1.(1 - 0.25)^3 = 0,421875$$
$$P(X = 2) = C_4^2.(0.25)^2.(1 - 0.25)^2 = 0,2109375$$
$$P(X = 3) = C_4^3.(0.25)^3.(1 - 0.25)^1 = 0,046875$$
$$P(X = 4) = C_4^4.(0.25)^4.(1 - 0.25)^0 = 0,00390625$$

***Proposition : Paramètres d'une Loi binomiale* :**

Soit $X \sim B(n; p)$, Alors on a :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p)$$

IV Loi géométrique

***Définition* :**

Considérons une épreuve de Bernoulli dans laquelle le succès a une probabilité p. On note q la probabilité $q = 1 - p$ de l'échec. On répète l'épreuve de Bernoulli de façon indépendante jusqu'à l'obtention d'un succès.
Soit X le nombre de répétitions nécessaires à l'obtention d'un succès. L'événement $X = n$ est la conjonction de $n - 1$ échecs suivi d'un succès. Comme les épreuves successives sont indépendantes, les probabilités se multiplient :
$\forall n \in IN^*$ on a : $P(X = n) = p.q^{n-1}$
Cette loi de probabilité est appelée loi géométrique de paramètre p surIN^*, et est notée $X \sim Geom^*(p)$. Sa loi de probabilité est donnée par : $\forall n \in IN^*$ on a : $P(X = n) = p.q^{n-1}$.
Si X est le nombre de répétition avant l'obtention d'un succes. on dit que X suit une loi geometrique de parametre p sur IN. Sa loi de probabilite est donnée par : $\forall n \in IN$ on a : $P(X = n) = p.q^n$. La relation " X suit une loi geometrique de parametre p sur IN " est notee $X \sim Geom(p)$.

Exemples :

1. On lance un dé jusqu'à obtenir un 6. X est le nombre de lancers jusqu'à obtenir 6.
   Le jet d'un dé est ici une épreuve de Bernoulli, avec deux résultats possibles.
   a) Le succès ; on obtient un 6. Sa probabilité est $p = \dfrac{1}{6}$ puisque le dé est équilibré.
   b) L'échec : on n'obtient pas un 6. Sa probabilité est $q = 1 - p = \dfrac{5}{6}$.
   La loi de probabilité de X est donc donnée par :
   $$P(X = n) = (\frac{1}{6}).(\frac{5}{6})^{n-1} \quad \forall n \in IN^*$$
   C'est la loi géométrique sur IN^* de paramètre $\dfrac{1}{6}$.

2. Ahmed tire sur un oiseau jusqu'à le 1^{er} touché de l'oiseau. A chaque fois la probabilité de succès pour Ahmed est $\frac{1}{4}$. On considère X la variable aléatoire correspondant au nombre de tir avant le 1^{er} touché de l'oiseau.
   X suit une loi géométrique sur IN de paramètre $\frac{1}{4}$. Et on a : $P(X=n)=(\frac{1}{4}).(\frac{3}{4})^n \quad \forall n \in IN$

Propriétés :

Espérance et variance d'une loi Géométrique.
Soit X une variable Géométrique, on a :
- Si $X \sim Geom^*(p)$ alors $E(X)=\frac{1}{p}$ et $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$.
- Si $X \sim Geom(p)$ alors $E(X)=\frac{1-p}{p}$ et $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$.

V Loi hypergéométrique

Exercice introductif :
Dans une urne contenant 5 boules dont 3 blanches et 2 noires, on tire au hasard 4 boules, sans remise (tirage exhaustif).On note X le nombre de boules blanches tirées

1. Déterminer $X(\Omega)$
2. Calculer $P(X=3)$

Correction :

Définition :

On tire sans remise n objets d'un ensemble de N objets dont N_1 possèdent une caractéristique particulière (et les autres $N_2 = N - N_1$ ne la possèdent pas).
Soit X le nombre d'objets de l'échantillon qui possèdent la caractéristique.
La valeur maximum de X est le plus petit des deux nombres entiers n et N_1.
La valeur minimum de X est le plus grand des deux entiers relatifs 0 et $n - N_2$.
Donc, on a : $X(\Omega)=\{Max(0;n-N_2), Max(0;n-N_2)+1, ..., Min(n,N_1)\}$.
Pour tout $k \in X(\Omega)$, on a : $P(X=k)=\frac{C_{N_1}^k \, C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}$
donc X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, n, $p=\frac{N_1}{N}$. Et on écrit $X \sim H(N,n;p)$.

Proposition : Paramètres d'une Loi hypergéométrique :

Soit $X \sim H(N,n;p)$, Alors on a :

$$E(X)=np \quad \text{et} \quad V(X)=np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

Exemple :
Dans une boîte, il y a 6 boules rouges et 8 boules jaunes. On tire au hasard 3 boules de la boîte, sans remise.
Soit X le nombre de boules rouges tirées.
On a alors, $X \sim H(14;3;\frac{6}{14})$

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

VI Loi de Poisson

La loi de Poisson modélise des situations où l'on s'intéresse au nombre de réalisation d'un événement dans un laps de temps déterminé ou dans une région donnée.

Par exemple :

- Nombre d'appels téléphoniques qui arrivent à un standard en x minutes,
- nombre de clients qui attendent à la caisse d'un magasin,
- nombre de défauts de peinture par m^2 sur la carrosserie d'un véhicule ...

***Définition* :**

Soient λ la moyenne de réalisation d'un événement, et X le nombre de réalisation de cet événement. La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, $(\lambda > 0)$ si

$$X(\Omega) = IN \; et \; P(X = k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \;\; pour\, tout\, k \in IN$$

On écrit $X \sim P(\lambda)$. Le paramètre λ correspond à la moyenne de la loi de Poisson.

Exemple :

Le nombre moyen de clients à un guichet par heure est égal à 15, calculons la probabilité d'observer 20 arrivées dans une heure donnée, supposant que les arrivées sont indépendantes les unes des autres. Ici, la valeur de $\lambda = 15$ et on cherche la probabilité $P(X = 20)$, donc : $P(X = 20) = \frac{e^{-15}15^{20}}{20!} = 0.042$

Exercice :

Un magasin spécialisé reçoit en moyenne 4 clients par jour, le nombre de clients étant distribué selon une loi de Poisson. Calculer la probabilité que le magasin soit visité le mercredi par :
1. aucun client ;
2. 5 clients ;
3. au moins 6 clients.

Correction :

***Propriétés* :**

- Si $X \sim P(\lambda)$ Alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.
- Si $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$, X_1 et X_2 sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

Exemple :

La moyenne de vente d'un produit A dans un point de vente d'une chaine de magasins est de 5 articles par jour. Dans un autre point de vente la moyenne de vente est de 6 articles par jour.
Soit X le nombre d'articles du produit A vendu par jour par l'ensemble des deux magasins. X suit une loi de Poisson de paramètre $5 + 6 = 11$.

Généralisation :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires de lois de Poisson de paramètres $\lambda_1, \lambda_2...., \lambda_n$ et indépendantes. Alors la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit une loi de poisson $P(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)$.

VII Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

La loi Hypergéométrique est utilisé quand la taille de la population est connue. Il est naturel de se demander quand la taille de la population devient grande, que devient la loi Hypergéométrique ?.

Pour $X \sim H(N, n; p)$ avec $p = \dfrac{N_1}{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n} \\
&= \frac{N_1! N_2! n! (N-n)!}{k!(N_1-k)!(n-k)! N_2 - n + 1)! N!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{N_1(N_1-1)...(N_1-k+1) \times N_2(N_2-1)...(N_2-n+k+1)}{N(N-1)...(N-n+1)}
\end{aligned}$$

Le produit $N_1(N_1-1)...(N_1-k+1)$ possède k facteurs chacun équivalent N_1 lorsque $N \to +\infty$
Le produit $N_2(N_2-1)...(N_2-n+k+1)$ possède $n-k$ facteurs chacun équivalent N_2 lorsque $N \to +\infty$
Le produit $N(N-1)...(N-n+1)$ possède n facteurs chacun équivalent N lorsque $N \to +\infty$
donc on en déduit que pour $N \to +\infty$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{N_1(N_1-1)...(N_1-k+1) \times N_2(N_2-1)...(N_2-n+k+1)}{N(N-1)...(N-n+1)} \simeq \frac{N_1^k N_2^{n-k}}{N^n} &= (\frac{N_1}{N})^k (1 - \frac{N_1}{N})^{n-k} \\
&= p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

Donc $P(X = k) \sim C_{n-k}^k p^k (1-p)^{n-k}$
Donc $X \sim B(n; p)$

***Proposition* :**

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Hypergéométrique $H(N, n, p)$, si N est très grand alors la loi X peut être approchée par une loi binomiale $B(n, p)$.
En pratique, dès que $N > 10n$ c'est à dire, $\dfrac{n}{N} < 0,1$, on pourra dire que l'on peut approcher la loi hypergéométrique par la loi binomiale.
($\dfrac{n}{N} < 0,1$ signifie que le taux de sondage est inférieur à 10%, ou la taille de l'échantillon représente moins de 10% de celle de la population).

Exemple :
Soit X une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $H(100;4;0,05)$. Nous allons calculer $P(X \geq 1)$.

- Calcul exact :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{C_5^0 C_{95}^4}{C_{100}^4} \simeq 0.189$$

- Calcul approché : on approche la loi $H(100;4;0,05)$ par la loi $B(4;0,05)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_4^0 (0.05)^0 (0.95)^4 \simeq 0.185$$

VIII Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson

La loi de Poisson est toujours liée à l'étude des phénomènes rares. Alors dans l'étude d'une loi Binomiale $B(n,p)$ avec p très petit. On préfère souvent travailler avec une loi de Poisson.
Soit $X \sim B(n;p)$ avec $E(X) = np$, on pose $\lambda = np$ on a :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k}e^{(n-k)ln(1-\frac{\lambda}{n})} \end{aligned}$$

Or pour $n \to +\infty$ on a $n(n-1)...(n-k+1) \sim n^k$.
De plus $\frac{\lambda}{n} \to 0$, alors $ln(1-\frac{\lambda}{n}) \sim \frac{-\lambda}{n}$ et $\frac{n-k}{n} \sim 1$
Alors $P(X=k) \sim \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$
Alors $B(n;p) \sim P(\lambda)$ avec $\lambda = np$.

Proposition :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale $B(n,p)$, si n est grand et p est petit alors la loi X peut être approchée par une loi de Poisson $P(np)$.
En pratique, on peut approcher la loi $B(n,p)$ par la loi $P(np)$, dés que $n > 30$ et $p < 0,1$.

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(100;0,05)$. Nous allons calculer $P(X=2)$.

- Calcul exact :

$$P(X=2) = C_{100}^2 (0.05)^2 (0.95)^{98} \simeq 0.0812$$

- Calcul approché : on approche la loi $B(100;0,05)$ par la loi $P(5)$

$$P(X=2) = \frac{5^2}{2!}e^{-5} \simeq 0.0843$$

Exercies

Exercice 0 **:**(Loi de poisson)
Un bureau de réservations reçoit entre 10h et 12h en moyenne 1,2 appels téléphoniques par minute. On modélise ce phénomène par une variable de Poisson.
Déterminer

1. la probabilité qu'entre 11h et 11h01 on ait
   a. aucun appel
   b. un appel
   c. deux appels
2. la probabilité de recevoire 4 appels entre 11h et 11h02

Exercice 1 **:**(Loi de poisson)
Soit X le nombre de clients arrivant à un magasin pendant une durée déterminée. Sachant que le nombre moyen des arrivés est de 120 clients par heure. Quelle est la probabilité que :

1. Personne ne se présente à ce magasin pendant une durée de 5mn.
2. 2 personnes se présentent à ce magasin pendant une durée de 30 secondes.

Exercice 2 **:**(Loi hypergéométrique)
10 garçons et 8 filles ont participé dans une course. La liste des gagnants contienent 5 coureurs. Soit la variable aléatoire $X =$ "nombres de filles gagnantes".
1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3 **:**(Loi binomiale)
Un vendeur de voitures vend le même jour 7 véhicules identiques. La probabilité pour que ce type de voiture soit en état de rouler deux ans après est de 0.9. Soit X la variable aléatoire associée au "nombre de voitures en état de rouler deux ans après leur achat".
calculer la probabilité :
1. Que les 7 voitures soient en service deux ans plus tard ;
2. Que les 7 voitures soient hors de service deux ans plus tard ;
3. Que 3 voitures au plus soient hors de service.

Exercice 4 **:**(Approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson)
Si 1a probabilité pour qu'un individu ait une mauvaise réaction à l'injection d'un certain sérum est de 0.001, déterminer la probabilité pour que sur 2000 individus :

1. trois aient une mauvaise réaction
2. plus de deux aient une mauvaise réaction

Exercice 5 **:**
Un étudiant doit passer un examen. Il a 10 sujets à apprendre, il n'en apprend que 3. Sachant qu'on lui pose deux questions (2 sujets) :

1. Calculer la probabilité pour que les deux sujets soient parmi les 3 sujets appris.
2. Combien aurait-t-il du au minimum apprendre de sujets pour que la probabilité soit supérieure ou égale à 0.5.

Exercice 6 **:**
Une personne participe à une épreuve de tir. Elle a 4 chances sur 10 de toucher la cible. On suppose que les tirs sont des épreuves indépendantes l'une de l'autre.

1. Elle tire 3 fois de suite. Quelle est la probabilité qu'elle a touché la cible au moins une fois à l'issue de ces 3 tirs ?
2. **a.** On suppose qu'elle tire n fois . Calculer en fonction de n la probabilité qu'elle touche la cible au moins une fois.
   b. Combien de fois lui faut-elle tirer s'elle veut toucher la cible au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 0, 95 ?

Chapitre 5

Lois de probabilités continues

I Rappel sur les integrales généralisées

Exemple :

Calculons les integrales :
1) $\int_{-1}^{3}(x-2)\,dx$ 2) $\int_{-1}^{+\infty}(x-2)\,dx$ 3) $\int_{0}^{+\infty}(e^{-x})\,dx$ 4) $\int_{-\infty}^{+\infty}(xe^{-x^2})\,dx$

II Généralités

Définition 1 **:**

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (bornée ou non bornée).

Exemple :

Les variables aléatoires,
1- Les salaires mensuels des employés d'une société.
2- Les ventes annuelles d'un produit donné.
3- La masse corporelle des individus pour un espèce animal donné.

4- Le taux de glucose dans le sang.
5-... Etc.

sont des variables aléatoires continues.

***Définition 2* :**

Une fonction f définit sur IR est une densité de probabilité si et seulement si

1. La fonction f est continue sur IR sauf, peut-être en un nombre fini de points.
2. $\forall x \in IR,\ f(x) \geq 0$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

Exemple :

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a : f est continue sur $IR - \{1\}$, $\forall x \in IR,\ f(x) \geq 0$, et
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx$
$= 0 + \int_0^1 2x\, dx + 0 = [x^2]_0^1 = 1$

Exercice 1 :

On considère la fonction g définie sur IR par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [1,e] \\ g(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que g définie une densité de probabilité sur IR

Correction :

Exercice 2 :

On considère la fonction h définie sur IR par : $\begin{cases} h(x) = 2e^{-2x} & \text{si } x \in [0,+\infty[\\ h(x) = 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\end{cases}$

Montrer que h définie une densité de probabilité sur IR

Correction :

***Définition 3* :**

Une variable aléatoire X est dite continue s'il existe une densité de probabilité f telle que pour tout ensemble B de nombres réels, on a :

$$P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$$

Exemple :
$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f.
Pour tous réels a et b, on a :

1. $P(X = a) = 0$;
2. $P(X > a) = P(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$;
3. $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$;
4. $P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$.

Exemple :
On considère la variable aléatoire X continue de densité de probabilité la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = a(2x-3) & \text{si } x \in [2,5] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- Calculer a, $P(1 \leq X \leq 4)$ et $P(X > 3)$.

Correction :

Définition 4 :

Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f. Alors, on a :

1. L'espérance de X est définie par $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$
2. La variance de X est définie par :

$$\begin{aligned} V(X) =& E((X - E(X))^2) \\ =& \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[x - E(X)\Big]^2 f(x)\, dx \\ =& \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - (E(X))^2 \end{aligned}$$

3. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est définie par :

$$\forall x \in IR \quad F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt$$

Remarque : $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

Exemple :

On considère la variable aléatoire X continue de densité de probabilité la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{12}(2x-3) & \text{si } x \in [2,5] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Calculons $E(X)$; $V(X)$, et la fonction de répartition de X.

Correction :

III lois continues usuelles

III.1 Loi uniforme continue

Définition et Proposition **:**

Une variable aléatoire X est dite uniforme sur un intervalle $[a, b]$ si sa densité est constante sur $[a, b]$ et nulle ailleurs et on la note $U(a; b)$.
Précisément :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si X une variable aléatoire uniforme sur un intervalle $[a, b]$.Alors, on a :

1. $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
2. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < a \\ F(x) = \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ F(x) = 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Exemple :

On considère que la durée d'attente d'un bus qui passe toutes les 15 minutes est une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[0, 15]$.
La densité de X est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{15} & \text{si } x \in [0, 15] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la fonction de répartition F de X est :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = \dfrac{x}{15} & \text{si } x \in [0, 15] \\ F(x) = 1 & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

On a :

- $P(2 \leq X \leq 8) = F(8) - F(2) = \dfrac{8}{15} - \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{5}$.

- $P(-1 \leq X \leq 9) = F(9) - F(-1) = \dfrac{9}{15} - 0 = \dfrac{3}{5}$.

- $P(-2 \leq X \leq 18) = F(18) - F(-2) = 1 - 0 = 1$.

- $P(2 \leq X \leq 19) = F(19) - F(2) = 1 - \dfrac{2}{15} = \dfrac{13}{15}$.

- $E(X) = \dfrac{0+15}{2} = 7.5$.

- $V(X) = \dfrac{(15-0)^2}{12} = 18.75$.

Exercice :
Chaque matin, vous arrivez à 8 heures à l'arrêt de votre autobus, le passage de votre autobus suit une loi uniformément distribuée entre 8h et 8h 30.

1. Quelle est la probabilité qu'il passe entre 8h10 et 8h15 min lors d'une journée quelconque ?
2. Sachant que vous attendez depuis 10 min, quelle est la probabilité que votre attente dure encore moins de 18 min

Correction :

III.2 Loi exponentielle

Définition et Proposition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre réel $\lambda > 0$, et on la note $Exp(\lambda)$, si sa fonction de densité est :

$$\begin{cases} f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si X une variable aléatoire exponentielle de paramètre réel $\lambda > 0$.Alors, on a :

1. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
2. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F(x) = 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Dans la pratique, la loi exponentielle est souvent utilisée pour représenter le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifié.
1- Durée de fonctionnement d'un appareil électrique avant la première panne.
2- Temps qui nous sépare de la prochaine crise financière, du prochain appel téléphonique...etc
3- Le paramètre λ désigne alors l'inverse du temps d'attente moyen.

Exemple 1 :

Dans une certaine région, les accidents d'avions se produisent selon un processus de poisson de moyenne $\lambda = 2.5$ accidents par année.

1. Quelle est la probabilité que durant une année, on observe au moins 3 accidents d'avions dans cette région ?
2. Quelle est la probabilité que le temps qui sépare les deux prochains accidents d'avions dans cette région soit inférieure à 4 mois ?

Correction :

Exemple 2 :

Les données statistiques montrent que les décès dans un centre d'hébergement de longue durée se produisent avec une moyenne de 0.1 décès par jour selon un processus de poisson. Si une personne est décédée aujourd'hui.
Quelle est la probabilité que le prochain décès soit dans plus de deux semaines ?
Correction :

Exercice :

Une variable aléatoire X représente la durée de vie d'une ampoule d'un certain stock, suit une loi exponentielle de paramétre λ. Au bout de 190 jours, on constate que 95% des ampoules du stock fonctionnent, c'est-à-dire que : $P(X > 190) = 0,95$.

1. Quelle est l'espérance de X ?
2. Quelle est la probabilité qu'une ampoule marche pendant au moins 700 jours ?

Correction :

III.3 La loi normale

On parle de loi normale lorsque l'on a affaire à une variable aléatoire continue dépendant d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'additionnent et dont aucune n'est prépondérante (conditions de Borel). Cette loi acquiert sa forme définitive avec Gauss (en 1809) et Laplace (en 1812). C'est pourquoi elle porte également les noms de : loi de Laplace, loi de Gauss et loi de Laplace-Gauss.

Exemple :
La taille corporelle d'un animal dépend des facteurs environnementaux (disponibilité pour la nourriture, climat, prédation, etc.) et génétiques. Dans la mesure où ces facteurs sont indépendants et qu'aucun n'est prépondérant, on peut supposer que la taille corporelle suit une loi normale.

Définition et Proposition :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètre réels $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, et on la note $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$, si sa fonction de densité est définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}$

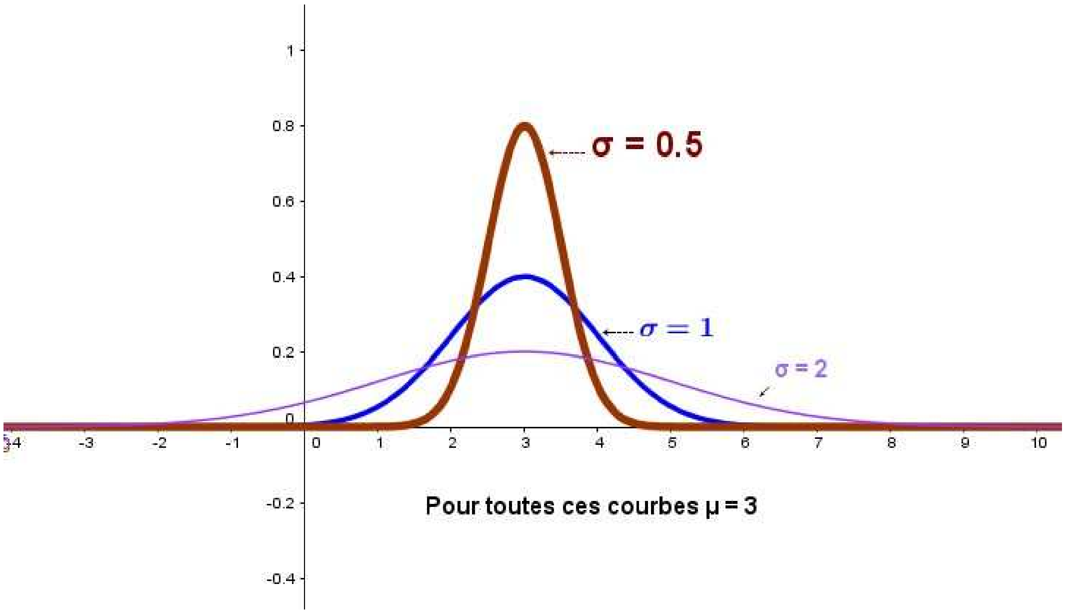
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Les lois normales sont aussi appelées lois de Gauss ou lois gaussiennes, ou encore lois de Laplace–Gauss.
L'espérance mathématique et l'écart-type d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ sont

$$E(X) = \mu \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sigma.$$

FIGURE 5.1 – La représentation de la fonction de Gauss pour $\sigma = 0.5$ et $\mu = 2$

Voici des exemples de courbes pour quelques valeurs de σ en laissant μ fixe :

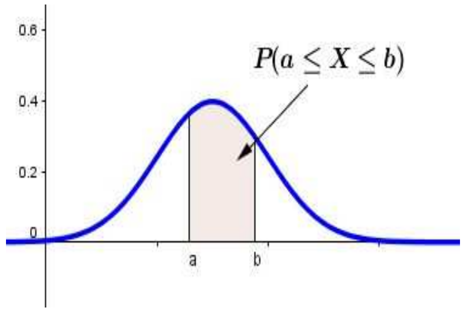


Remarques :

- La courbe de la loi normale admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = \mu$.
- Le maximum de la courbe est atteint en μ, espérance de la variable X (ce maximum valant $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$),
- Plus σ est grand, plus la courbe « s'étale » autour de la moyenne, en accord avec la signification de l'écart-type.
- Le paramétre σ représente le degré d'aplatissement de la courbe de la loi normale dont la forme est celle d'une courbe en cloche.

Propriété :

Pour tous a et b réels tels que $a \leq b$ on a :
$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$



II.3.1 Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$

Définition :

La variable aléatoire T qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ est dite **variable aléatoire centrée réduite**. Sa densité de probabilité est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

La fonction de répartition de la loi $T \sim N(0;1)$, notée Π, est définie par :

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

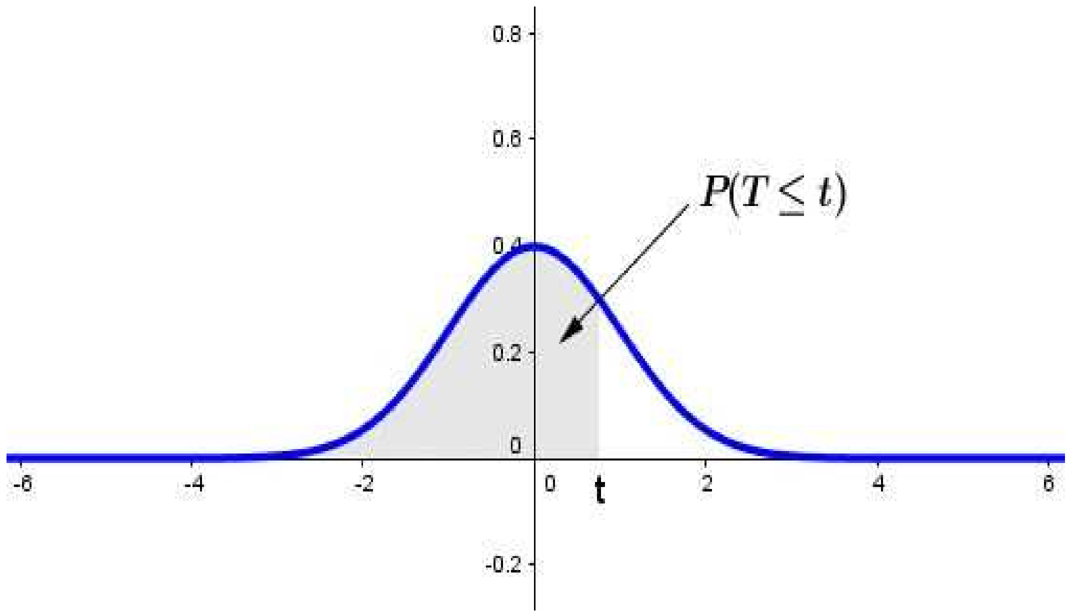


FIGURE 5.2 – La représentation de la fonction de Gauss $\mathcal{N}(0;1)$

Propriété :

Soit T la variable aléatoire centrée et réduite.

- $P(T \geq t) = 1 - \Pi(t)$.
- Si t est positif : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.
- Pour tous $a; b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$: $P(a \leq T \leq b) = \Pi(b) - \Pi(a)$.
- Pour tout $t \geq 0$, $P(-t \leq T \leq t) = 2\Pi(t) - 1$.

II.3.2 Utilisation de la table de la loi normale centrée réduite

La table suivante donne les valeurs de la loi normale centrée réduite pour des valeurs positives :

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

FIGURE 5.3 – les valeurs de la loi normale centrée réduite pour des valeurs positives

Exemple :

- **Calcul de** $P(T \leq 1,36)$ **:**
  On a $t = 1,36 = 1,3 + 0,06$, donc $P(T \leq 1,36)$ est le nombre situé à l'intersection de la colonne $0,06$ et de la ligne $1,3$. Donc $\Pi(1,36) = P(T \leq 1,36) = 0,9131$.

- **Calcul de** $P(T \geq 1,25)$ **:**
  $P(T \geq 1,25) = 1 - \Pi(1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056$.

- **Calcul de** $P(T \leq -1,17)$ **:**
  $P(T \leq -1,17) = P(T \geq 1,17) = 1 - \Pi(1,17) = 1 - 0,8790 = 0,121$.

- **Calcul de** $P(1,15 \leq T \leq 1,37)$ **:**
  $P(1,15 \leq T \leq 1,37) = \Pi(1,37) - \Pi(1,15) = 0,9147 - 0,8749 = 0,0398.$

II.3.3 Relation avec la loi normale

Propriété :

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$, alors la variable aléatoire $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. En particulier, on a $E(T) = 0$ et $\sigma(T) = 1$.

Ce résultat est très important, puisqu'alors il nous suffit d'étudier la loi normale centrée réduite puis de procéder à un changement de variable pour obtenir n'importe quelle loi normale !

Exemple :
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres $\mu = 12$ et $\sigma = 3$.
On pose $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-12}{3}$.

➔ Calcul de $P(X < 16)$:

$X < 16 \Longleftrightarrow T < \dfrac{16-12}{3} \Longleftrightarrow T < \dfrac{4}{3}$.
Donc, $P(X < 16) = P(T < 1,33) = \Pi(1,33)$.
On lit sur la table $\Pi(1,33) = 0,9082$ donc : $P(X < 16) = 0,9082$.

➔ Calcul de $P(9 < X < 15)$:

$$\begin{aligned} P(9 < X < 15) &= P(-1 < T < 1) \\ &= 2\Pi(1) - 1. \end{aligned}$$

Or, $\Pi(1) = 0,8413$ donc : $P(9 < X < 15) = 2 \times 0,8413 - 1 = 0,6828$

Remarque :
Si X suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors
- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$.
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.

Démonstration :

$T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \Longleftrightarrow X = \mu + \sigma T$.

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq T \leq 1) = 2\Pi(1) - 1 = 2 \times 0,8413 - 1 \approx 0,68.$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq T \leq 2) = 2\Pi(2) - 1 = 2 \times 0,9772 - 1 \approx 0,95.$

Interprétation graphique :

II.3.4 Opérations sur les variables suivant une loi normale

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$. Alors, pour tous $a;b\in\mathbb{R}$:

- ♦ La variable aléatoire $aX+b$ suit la loi normale $\mathcal{N}(a\mu+b\,;|a|\sigma)$,

Si de plus Y suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu';\sigma')$, alors

- ♦ La variable aléatoire $X+Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu+\mu';\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2})$,
- ♦ La variable aléatoire $X-Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu-\mu';\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2})$,

***Exemple* :**

Si X suit la loi $\mathcal{N}(1;\sqrt{3})$ et Y suit la loi $\mathcal{N}(-1;1)$, alors :

- ➔ La variable aléatoire $-2X+5$ suit la loi normale $\mathcal{N}(3;2\sqrt{3})$,
- ➔ La variable aléatoire $X+Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0;2)$,
- ➔ La variable aléatoire $X-Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(2;2)$.