# Transformée de Laplace [1]

***Objectif*** Développer des outils pour la résolution d'équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles.

# I - Fonctions Causales

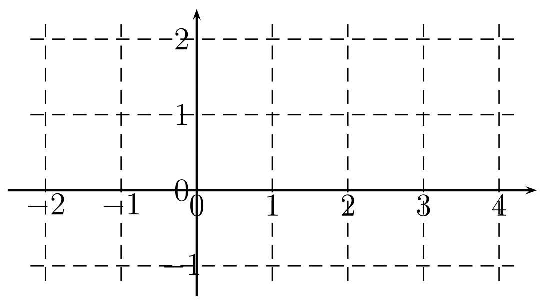
**Définition** *Une fonction $f$ (ou un signal) de la variable réelle $t$ est dite causale si pour tout $t$ strictement négatif on à $f(t) = 0$.*

$$f(t) = 0 \quad si\ t \in ]-\infty; 0[$$

## 1) Fonction échelon unité ou fonction de Heaviside [2]

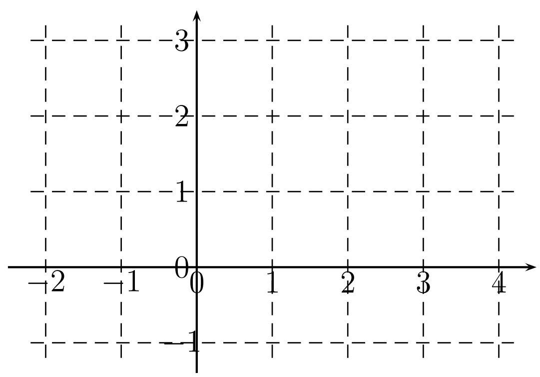
Cette fonction notée $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & si\ t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & si\ t \geq 0 \end{cases}$$




Remarque : Pour toute fonction $f$, la fonction $f$ définie par $f(t) = g(t)\mathcal{U}(t)$ est causale.

## 2) Fonction rampe unité




Cette fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & si\ t < 0 \\ f(t) = t & si\ t \geq 0 \end{cases} \iff f(t) = t \times \mathcal{U}(t)$$

1. Pierre-Simon Laplace, né le 23 mars 1749 à Beaumont-en-Auge et mort le 5 mars 1827 à Paris, est un mathématicien, astronome et physicien français.
Laplace est l'un des principaux scientifiques de la période napoléonienne ; en effet, il a apporté des contributions fondamentales dans différents champs des mathématiques, de l'astronomie et de la théorie des probabilités ; il a été l'un des scientifiques les plus influents de son temps, notamment par son affirmation du déterminisme ; il a contribué de façon décisive à l'émergence de l'astronomie mathématique reprenant et étendant le travail de ses prédécesseurs dans son traité intitulé Mécanique Céleste (1799-1825). Ce chef-d'œuvre, en cinq volumes, a transformé l'approche géométrique de la mécanique développée par Newton en une approche fondée sur l'analyse mathématique. En 1799 il est nommé ministre de l'intérieur sous le Consulat. Napoléon Ier, en 1806 lui confère le titre de comte de l'Empire. Il est nommé marquis en 1817, après la restauration des Bourbons.
2. Oliver Heaviside (18 mai 1850 - 3 février 1925) était un physicien britannique autodidacte. Il a formulé à nouveau et simplifié les équations de Maxwell sous leur forme actuelle utilisée en calcul vectoriel.

## 3) Fonction retardée/avancée

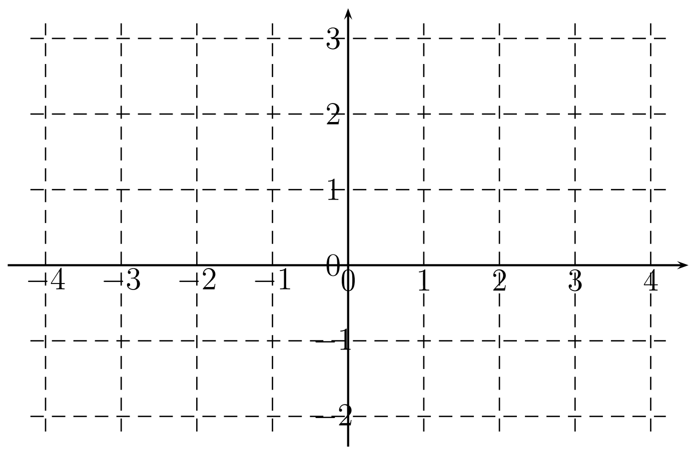
**Définition** *Soit $f$ une fonction de la variable réelle $t$ définie sur $\mathbb{R}$.*

- *Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = f(x-a)$, $a$ étant un réel positif.*
  *On dit que la fonction $g$ est la fonction $f$ retardée de $a$.*
- *Soit $h$ la fonction définie par $h(x) = f(x+a)$, $a$ étant un réel positif.*
  *On dit que la fonction $h$ est la fonction $f$ avancée de $a$.*

**Propriété** *Dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, la courbe représentative de la fonction $g$ se déduit de celle de $f$ par une translation de vecteur $a\vec{u}$, tandis que la courbe représentative de la fonction $h$ se déduit de celle de $f$ par une translation de vecteur $-a\vec{u}$.*

**Exercice** 1 Représenter graphiquement les fonctions suivnates :

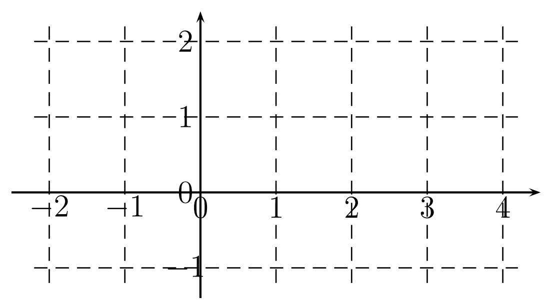
- $f : t \mapsto \mathcal{U}(t-2)$
- $g : t \mapsto sin(t)\,\mathcal{U}(t)$
- $h : t \mapsto sin(t-\pi)\,\mathcal{U}(t-\pi)$




## 4) Fonction créneau

Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $0 < a < b$ et $k$ un nombre réel.
La fonction créneau est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\left\{\begin{array}{lll} f(t) = 0 & \text{si} & t < a \\ f(t) = k & \text{si} & a \leq t < b \\ f(t) = 0 & \text{si} & t \geq b \end{array}\right. \iff f(t) = k\big[\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)\big]$$

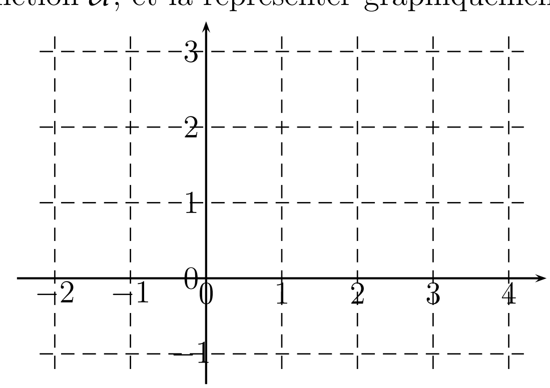



**Exercice** 2 Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 3\,\mathcal{U}(t) - (t-1)\,\mathcal{U}(t-1) + (t-3)\,\mathcal{U}(t-3)\,.$$

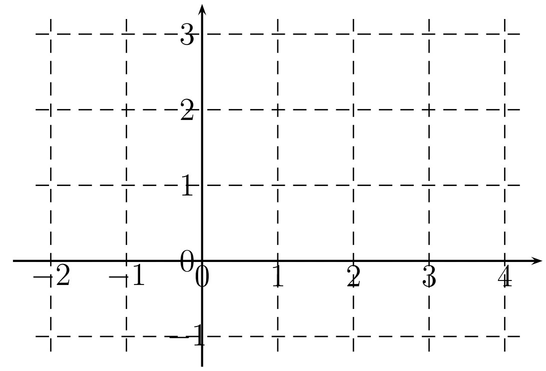
Donner l'expression de $f$ "par morceaux", sans utiliser la fonction $\mathcal{U}$, et la représenter graphiquement.

$$\left\{\begin{array}{lll} f(t) = \quad \dots & \text{si} & t < 0 \\ f(t) = \quad \dots & \text{si} & 0 \leqslant t < 1 \\ f(t) = \quad \dots & \text{si} & 1 \leqslant t < 3 \\ f(t) = \quad \dots & \text{si} & 3 \leqslant t \end{array}\right.$$



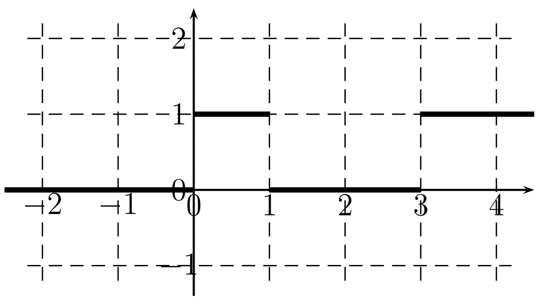
**Exercice** 3 Pour $k$ et $\tau$ deux réels strictement positifs, on définit la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ par :

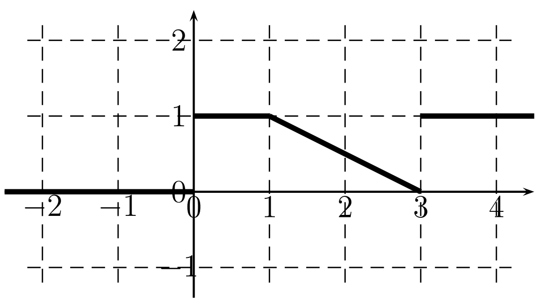
$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ g(t) = \dfrac{k}{\tau}t & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \tau \\ g(t) = k & \text{si} \quad t > \tau \end{cases}$$

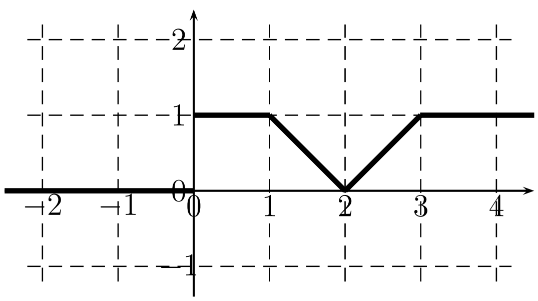


Tracer la représentation graphique de $f$, et déterminer l'expression de la fonction $g$, "en un seul morceaux" en utilisant la fonction échelon $\mathcal{U}$.

**Exercice** 4 Définir la fonction $f$ représentée graphiquement en utilisant l'échelon unité $\mathcal{U}$.







# II - Intégrales impropres (ou intégrales généralisées)

**Définition** *Soit $a \in \mathbb{R}$, $f$ une fonction continue sur $[a;+\infty[$, $x \in ]a;+\infty[$, et*

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt$$

*Si $I(x)$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $I(x)$ converge et on pose*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

*Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.*

**Exercice** 5 Calculer les intégrales :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \qquad K = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt \qquad L = \int_0^{+\infty} te^{-pt}\,dt\ , p > 0$$

Remarque : **Critère de Riemann**

Pour quelles valeurs du réel $\alpha$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge-t-elle ?

# III - Transformation de Laplace

## 1) Définition

**Définition** *La transformée de Laplace d'une fonction causale $f$ est la fonction $F = \mathcal{L}f$ de la variable réelle complexe $p$ définie par*

$$F(p) = (\mathcal{L}f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

*Remarques :*

- Pour que $F$ existe, il faut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}dt$ soit convergente
- Par abus d'écriture et pour simplifier les notations, on la note souvent $\mathcal{L}[f(t)]$ ou $\mathcal{L}[f](p)$

**Exercice** 6 Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(t) = \mathcal{U}(t)$
2. $f(t) = t\,\mathcal{U}(t)$
3. $f(t) = e^{-at}$, pour $p$ tel que $\mathcal{R}e(p) > -\mathcal{R}e(a)$.
4. $f(t) = \sin(\omega t)\,\mathcal{U}(t)$, $\omega > 0$.

## 2) Transformée de Laplace des fonction usuelles

a) **Transformée de Laplace de l'échelon unité** $(t \mapsto \mathcal{U}(t))$

La transformée de Laplace de l'échelon unité est définie pour $p > 0$ et on a

$$(\mathcal{L}\mathcal{U})(p) = \mathcal{L}[\mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p}$$

b) **Transformée de Laplace de la fonction rampe** $t \mapsto t \times \mathcal{U}(t)$

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a

$$\mathcal{L}[t \times \mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p^2}$$

c) **Transformée de Laplace de la fonction** $t \mapsto t^n \times \mathcal{U}(t)$**,** $n \in \mathbb{N}$

La transformée de Laplace de la fonction $(t \mapsto t^n \times \mathcal{U}(t))$ est définie pour $p > 0$ et on a

$$\mathcal{L}[t^n \times \mathcal{U}(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

d) **Transformée de Laplace de la fonction** $t \mapsto e^{at} \times \mathcal{U}(t)$**,** $a \in \mathbb{C}$

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto e^{at} \times \mathcal{U}(t)$ est définie pour $\mathcal{R}e(p) > \mathcal{R}e(a)$ et on a

$$\mathcal{L}[e^{at} \times \mathcal{U}(t)] = \frac{1}{p-a}$$

# IV - Propriétés de la transformation de Laplace

## 1) Linéarité

Soit $f$ et $g$ deux fonctions causales admettant des transformées de Laplace.

- Alors la fonction $f + g$ admet une transformée de Laplace et

$$\mathcal{L}[f+g](p) = \mathcal{L}[f](p) + \mathcal{L}[g](p)$$

- Quelque soit $k$ appartenant à $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L}[k \times f](p) = k \times \mathcal{L}[f](p)$$

**Exercice 7** Donner la transformée de Laplace de la fonction définie par $f(t) = (3t+4) \times \mathcal{U}(t)$

## 2) Théorème du retard

**Théorème** *Si* $F(p) = \mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)]$, *alors* $\mathcal{L}[f(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau)] = e^{-\tau p}F(p)$

**Exercice 8** Déterminer la transformée de Laplace de $f(t) = \mathcal{U}(t-1) - \mathcal{U}(t-3)$.

## 3) Effet d'un changement d'échelle sur la variable

**Théorème** *Soit $\alpha > 0$*

$$\text{Si } F(p) = \mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)], \text{ alors } \mathcal{L}[f(\alpha t)\mathcal{U}(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

*Remarque :* Pour $\alpha > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{U}(\alpha t) = \mathcal{U}(t)$

**Exercice** 9 Soit $f$ telle que $\mathcal{L}[f(t)\mathcal{U}(t)] = \dfrac{p}{p^3+1}$. Déterminer $\mathcal{L}\big[f(2t)\mathcal{U}(t)\big]$ .

## 4) Effet de la multiplication par $e^{-ta}$

**Théorème** *Pour $a \in \mathbb{C}$, avec $\mathcal{R}e(p) > -\mathcal{R}e(p)$,*

$$\text{Si } F(p) = \mathcal{L}\big[f(t)\mathcal{U}(t)\big], \text{ alors } \mathcal{L}\big[f(t)e^{-ta}\mathcal{U}(t)\big] = F(a+p)$$

**Exercice** 10 Montrer que les transformées de Laplace des fonctions $t \mapsto cos(\omega t)$ et $t \mapsto sin(\omega t)$ sont

$$\mathcal{L}[cos(\omega t)\,\mathcal{U}(t)](p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[sin(\omega t)\,\mathcal{U}](t)(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

**Exercice** 11 Soit $f$ telle que $f(t) = sin(t)e^{-t}\mathcal{U}(t)$. Déterminer $F(p)$

## 5) Transformée d'une dérivée

**Théorème** *Soit $f$ une fonction continue sur $]0;+\infty[$, dérivable par morceaux sur $]0;+\infty[$, dont la dérivée $f'$ est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$.*

$$\mathcal{L}\big[f'(t)\,\mathcal{U}(t)\big] = pF(p) - f(0^+)$$

**Théorème** *Soit $f$ une fonction admettant une transformée de Laplace $F$.*
*Si $f'$ est continue sur $]0;+\infty[$, dérivable par morceaux sur $]0;+\infty[$, et si $f''$ est continue par morceaux sur $]0;+\infty[$ alors*

$$\mathcal{L}\big[f''(t)\,\mathcal{U}(t)\big] = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$$

**Exercice** 12 Exprimer la transformée de Laplace de la dérivée troisième de $f$, $\mathcal{L}\left[f'''(t)\,\mathcal{U}(t)\right]$.

## 6) Transformée d'une intégrale

**Théorème** $$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\mathcal{U}(u)du\right] = \frac{1}{p}\mathcal{L}\big[f(t)\mathcal{U}(t)\big] = \frac{1}{p}F(p).$$

## 7) Dérivée d'une transformation de Laplace

**Théorème** *Soit $f$ une fonction admettant une transformée de Laplace $F$.*

$$F'(p) = \mathcal{L}\big[-tf(t)\mathcal{U}(t)\big]$$

**Exercice** 13 Donner la transformée de Laplace de la fonction f définie par $f(t) = t \times sin(t)\mathcal{U}(t)$ .

## 8) Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

**Théorème** *Soit* $F(p) = \mathcal{L}\big[f(t)\mathcal{U}(t)\big]$.
*Si les fonctions considérées ont des limites dans les conditions indiquées, on a :*

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = \lim_{t\to 0^+} f(t) \qquad \textit{(théorème de la valeur initiale)}$$

$$\lim_{p\to 0^+} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t) \qquad \textit{(théorème de la valeur finale)}$$

## 9) Calculs de transformées de Laplace

**Exercice** 14 Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(t) = (t^3 - 3t + 1)\,\mathcal{U}(t)$
2. $f(t) = (3\sin t - 2\cos(3t))\,\mathcal{U}(t)$
3. $f(t) = e^{-3t+2}\,\mathcal{U}(t)$

**Exercice** 15 On considère les fonctions $f$, $g$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \sin(2t)\,\mathcal{U}(t) \quad g(t) = \cos t\,\mathcal{U}(t) \quad h(t) = \sin(2t)\cos t\,\mathcal{U}(t) = f(t)\times g(t)$$

On note $F$, $G$ et $H$ leurs transformées de Laplace respectives.

1. Caluler $F(p)$ et $G(p)$.
2. Linéariser $\sin(2t)\cos t$. En déduire $H(p)$.
3. A-t-on $H = F \times G$ ?

**Exercice** 16 En faisant apparaître le terme $t-1$, calculer la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = t^2\,\mathcal{U}(t-1)$.

**Exercice** 17 En s'inspirant de la méthode de l'exercice précédent, calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

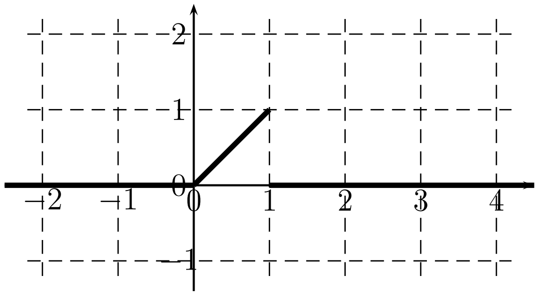
1. $f(t) = (t+1)\,\mathcal{U}(t-2)$
2. $f(t) = (t^2 - t + 1)\,\mathcal{U}(t-1)$
3. $f(t) = e^{-t}\,\mathcal{U}(t-1)$

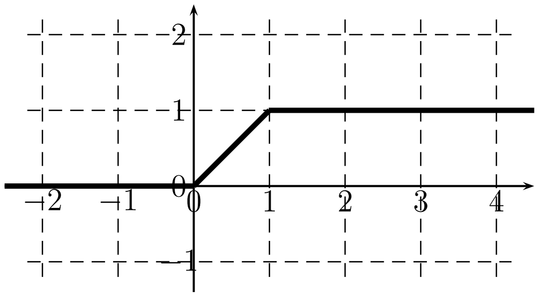
**Exercice** 18 Soit $f$ la fonction définie par :

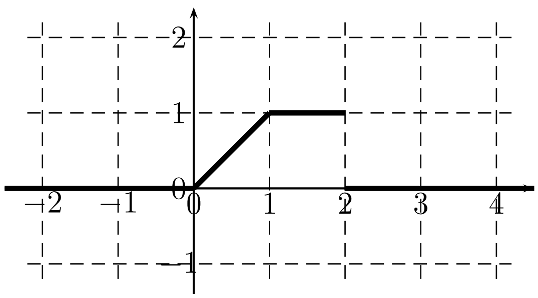
$$f(t) = \frac{k}{\tau}\mathcal{U}(t) - \frac{k}{\tau}(t-\tau)\,\mathcal{U}(t-\tau) \qquad \text{avec } \tau \text{ et } k \text{ deux réels strictement positifs.}$$

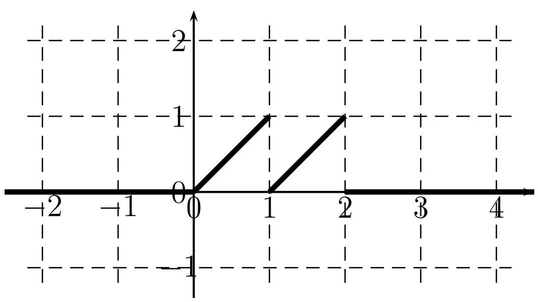
1. Représenter la fonction $f$.
2. Prouver que $F(p) = \dfrac{k}{\tau p^2}\,(1 - e^{-\tau p})$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{p\to 0^+} pF(p)$.
4. Vérifier sur cet exemple le théorème de la valeur finale.

**Exercice** 19 Définir les fonctions représentées graphiquement à l'aide de l'échelon unité et calculer leurs transformées de Laplace.









## V - Original d'une fonction

**Définition** *Si* $F(p)=\mathcal{L}\big[f(t)\mathcal{U}(t)\big]$, *on dit que* $f$ *est l'original de* $F$. *On note aussi* $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\big[F(p)\big]$.

**Théorème** *L'original, s'il existe, est unique.*

**Propriété** *Linéarité*

*a)* $\mathcal{L}^{-1}\big[F(p)+G(p)\big]=\mathcal{L}^{-1}\big[F(p)\big]+\mathcal{L}^{-1}\big[G(p)\big]$

*b)* $\mathcal{L}^{-1}\big[kF(p)\big]=k\mathcal{L}^{-1}\big[F(p)\big]$

**Exercice** 20 Donner l'original des fonctions suivantes

1. $F(p)=\dfrac{1}{p^2}$
2. $F(p)=\dfrac{3}{p+4}$
3. $F(p)=\dfrac{3}{p^2+4}$
4. $F(p)=\dfrac{3}{(p+4)^2}$
5. $F(p)=\dfrac{3}{p^2-4}$
6. $F(p)=\dfrac{3p}{(p+4)^2}$
7. $F(p)=\dfrac{3p}{p^2-4}$
8. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)}$ (Décomposer $F(p)$ en éléments simples, i.e. $F(p)=\dfrac{\alpha}{p}+\dfrac{\beta}{p^2}+\dfrac{\gamma}{p+1}$).
9. $F(p)=\dfrac{3e^{-2p}}{p+4}$
10. $F(p)=\dfrac{1+e^{-p}}{p^3}$

**Exercice** 21 Calculer l'original des fonctions suivantes :

1. $F(p)=\dfrac{1+3e^{-2p}}{p^2+2p+2}$
2. $F(p)=\dfrac{p^3+2p+1}{p^2(p^2+2)}$
3. $F(p)=\dfrac{1}{2p^2+p-1}$
4. $F(p)=\dfrac{1}{4p^2+16p+17}$

# VI - Applications de la transformation de Laplace

La transformation de Laplace permet de remplacer des problèmes de dérivation et d'intégration par des problèmes algébriques. Elle permet ainsi entre autre de transformer des équations différentielles, ou systèmes d'équations différentielles, en équations, ou systèmes d'équations, algébriques.

## 1) Résolution d'équations différentielles

Soit l'équation différentielles

$$s'(t) + s(t) = e(t) \tag{1}$$

avec la condition initiale $s(0^+) = 0$, et où $s$ est une fonction causale, continue sur $]0; +\infty[$, dérivable par morceaux et où $e$ est la fonction définie par $e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$.

On admet que la fonction recherchée $s$ et sa dérivée admettent des transformées de Laplace, et on note $S$ la transformée de Laplace de $s$ et $E$ celle de $e$.

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle (1), on obtient :

$$\mathcal{L}\left[s'(t) + s(t)\right] = \mathcal{L}\left[e(t)\right]$$

soit,

$$pS(p) - \underbrace{s(0^+)}_{=0} + S(p) = E(p) \iff S(p) = \frac{1}{p+1}E(p)$$

Il reste alors à calculer la transformée de Laplace $E(p)$ :

$$\mathcal{L}(e(t)) = \mathcal{L}\Big(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)\Big) = \mathcal{L}\Big(\mathcal{U}(t)\Big) - \mathcal{L}\Big(\mathcal{U}(t-1)\Big) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-p} = \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p}\right) .$$

On a donc,

$$S(p) = \frac{1}{p+1}E(p) = \frac{1}{p(p+1)}\left(1 - e^{-p}\right)$$

et il ne reste plus qu'à calculer l'original $s$ de $S$ :

$$S(p) = \frac{1}{p(p+1)}\left(1 - e^{-p}\right) = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{p(p+1)}e^{-p}$$

or, en décomposant en éléments simples : $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$ d'où,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p+1)}\right] = \mathcal{U}(t) - e^{-t}\mathcal{U}(t)$$

et, d'après le théorème du retard :

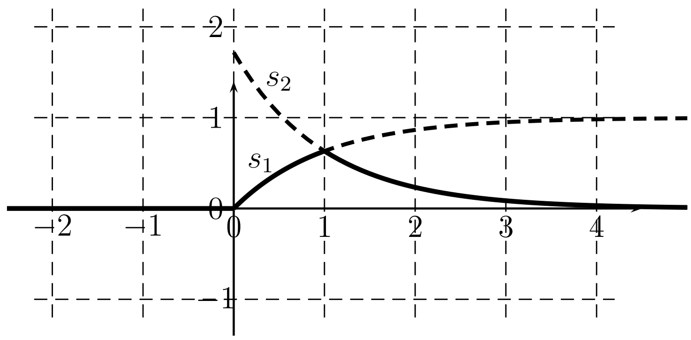
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p+1)}e^{-p}\right] = \mathcal{U}(t-1) - e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1) .$$

On en déduit donc la solution $s$,

$$s(t) = \mathcal{U}(t) - e^{-t}\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1) + e^{-(t-1)}\mathcal{U}(t-1)$$

ou encore, sans utiliser l'échelon unité $\mathcal{U}$ :

$$\left\{\begin{array}{lll} s(t) = 0 & \text{si,} & t < 0 \\ s(t) = s_1(t) = \quad 1 - e^{-t} & \text{si,} & 0 \leqslant t < 1 \\ s(t) = s_2(t) = \quad (e-1)e^{-t} & \text{si,} & t \geqslant 1 \end{array}\right.$$




**Exercice** 22 On considère l'équation différentielle :

$$2s'(t) - s(t) = e(t)\,,$$

avec la condition initiale $s(0^+) = 0$, où $s$ est une fonction causale, continue sur $]0;+\infty[$, dérivable par morceaux, et où $e$ est la fonction définie par $e(t) = 2\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)$.

On admet que $s$ et sa dérivée ont des transformées de Laplace, et on note $S$ la transformée de Laplace de $s$ et $E$ celle de $e$.

1. Représenter la fonction $e$.
2. Prouver que $S(p) = 2F(p) - F(p)e^{-2p}$, avec $F(p) = \dfrac{1}{p-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{p}$.
3. Calculer l'original de $F$.
4. En déduire la solution de l'équation différentielle.
5. Exprimer $s$ sans utiliser l'échelon unité.

**Exercice** 23 On considère l'équation différentielle :

$$s"(t) - 2s'(t) + s(t) = e(t)\,,$$

avec les conditions initiales $s(0^+) = 0$ et $s'(0^+) = 0$, et $e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$.

1. Représenter la fonction $e$.
2. Prouver que $S(p) = F(p) - F(pe^{-p}$, avec $F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}$.
3. Calculer l'original de $F$.
4. En déduire la solution de l'équation différentielle.
5. Exprimer $s$ sans l'échelon unité.

## 2) Résolution de systèmes d'équations différentielles

**Exercice** 24 Résoudre le système d'équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{array}\right.$$

avec les conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{l} x(0^+) = 1 \\ y(0^+) = 0 \end{array}\right.$$

où $x$ et $y$ sont des fonctions causales de la variables réelle $t$, continues sur $]0;+\infty[$, dérivables par morceaux. On admet que $x$, $y$, $x'$ et $y'$ admettent des transformées de Laplace.

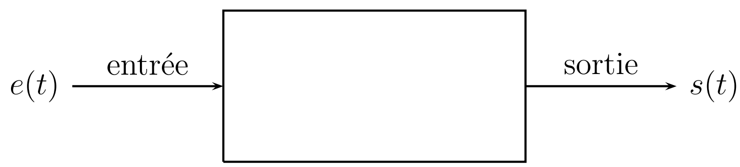
**Exercice** 25 En utilisant la trnasformation de Laplace, résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} x' & = 2x + y \\ y' & = x + 2y \end{array}\right.$$

avec les conditions initiales : $\left\{\begin{array}{l} x(0^+) = 0 \\ y(0^+) = 1 \end{array}\right.$, et où $x$ et $y$ sont des fonctions causales de la variable $t$, continues sur $]0;+\infty[$, dérivables par morceaux. On admet de plus que $x$, $y$ et leurs dérivées ont des transformées de Laplace.

## 3) Systèmes linéaires

On considère un système qui associe une sortie $s(t)$ à une entrée $e(t)$, avec $e$ et $s$ des fonctions causales.

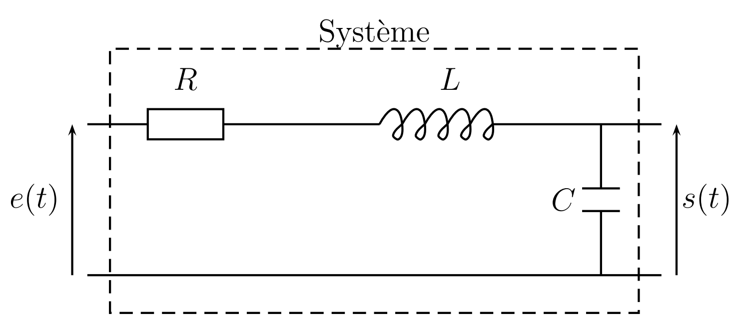



**Définition** *On dit que le système est linéaire d'ordre 2 si $e$ et $s$ vérifient une équation différentielle du type :*

$$a_2 s" + a_1 s' + a_0 s = b_2 e" + b_1 e + b_0 \,,$$

*où, $a_0$, $a_1$, $a_2$, $b_0$, $b_1$ et $b_2$ sont des nombres réels.*

Exemple : Circuit RLC




$e(t)$ et $s(t)$ sont les tensions d'entrée et de sortie du circuit, reliées par l'équation différentielle :

$$LCs" + RCs' + s = e \,.$$

Il s'agit donc bien d'un exemple de système linéaire.

**Définition** *On dit qu'un système est initialement au repos lorsque les conditions initiales sont :*

$$\left\{\begin{array}{l} s(0^+) = s'(0^+) = 0 \\ e(0^+) = e'(0^+) = 0 \end{array}\right.$$

Dans ces conditions, en appliquant la trasformée de Laplace, l'équation différentielle devient :

$$a_2p^2S(p) + a_1pS(p) + a_0S(p) = b_2p^2E(p) + b_1pE(p) + b_0E(p)\,,$$

et on en déduit :

**Propriété** *Pour un système initialement au repos, on a $S(p) = H(p) \times E(p)$, avec la* **fonction de transfert du système**

$$H(p) = \frac{b_2p^2 + b_1p + b_0}{a_2p^2 + a_1p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

**Théorème Stabilité d'un système**
*Un système linéaire est stable si, quand $e(t) = \delta(t)$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = 0$.*
*En d'autres termes, le système est stable si en le soumettant à une impulsion, il finit par retourner vers son état au repos.*

Si $e(t) = \delta(t)$, alors $E(p) = 1$, et donc, $S(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$.

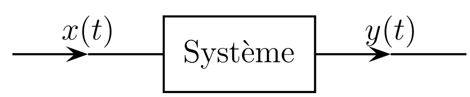
Le système linéaire est stable si, et seulement si, toutes les racines de $D(p)$ (qu'on appelle des **pôles**) ont leurs parties réelles négatives.

**Exercice** 26 Le circuit RLC précédent est-il stable ?

**Exercice** 27 *D'après un sujet de BTS*

La fonction de transfert d'un système $H$ est définie par :

$$H(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 2}\,.$$




On considère le signal d'entrée $x$ défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ x(t) = 5\sin t & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Le signal de sortie $y$ du système soumis au signal d'entrée $x$ est tel que :

$$Y(p) = H(p) \times X(p)$$

où $X$ et $Y$ sont les transformées de Laplace respectives des fonctions numériques $x$ et $y$ :

$$X(p) = \mathcal{L}\left[x(t)\right] \qquad \text{et} \qquad Y(p) = \mathcal{L}\left[y(t)\right]$$

On se propose de déterminer le signal de sortie $y$.

1. Déterminer $X(p)$ et $Y(p)$.
2. Déterminer les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que, pour tout réel $p$, on ait :

$$\frac{5p}{(p^2+1)(p^2+2p+2)} = \frac{ap+b}{p^2+1} + \frac{cp+d}{(p+1)^2+1}$$

3. (a) Calculer les originaux respectifs de :

$$\frac{p}{p^2+1}\,,\ \frac{1}{p^2+1}\,,\ \frac{p+1}{(p+1)^2+1}\,,\ \frac{1}{(p+1)^2+1}\,.$$

   (b) En déduire l'expression de $y(t)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $[0;+\infty[$.

**Exercice** 28 *D'après un sujet de BTS*

**Partie A.**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \sin\left(\dfrac{t}{2}\right) e^{\frac{-t}{2}}$.

1. Le but de cette question est l'étude des variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.
   a. Calculer $f'(t)$, puis vérifier que pour tout réel $t$ de l'intervalle $[0;\pi]$, $f'(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{-t}{2}} \cos\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
   b. Etudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.
   d. Tracer la représentation graphique de la fonction $f$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{u},\vec{v})$, pour $t$ variant dans l'intervalle $[0;\pi]$. On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.
   e. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0;\pi]$. (On pourra utiliser une double intégration par parties, ou utiliser les formules d'Euler).
2. On définit la fonction $g$ par :
$$g(t) = f(t)\mathcal{U}(t) - f(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)\ , \quad \text{où } \mathcal{U} \text{ est l'échelon unité}\,.$$
   a. Expliciter $g(t)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$, puis sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   b. On admet que les fonctions $t \mapsto f(t)\mathcal{U}(t)$ et $t \mapsto g(t)$ possèdent des transformées de Laplace $F$ et $G$.
   Calculer les transformées de Laplace suivantes :
$$\mathcal{L}\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathcal{U}(t)\right] \quad \text{puis} \quad \mathcal{L}\left[f(t)\mathcal{U}(t)\right] \quad \text{et enfin} \quad \mathcal{L}\left[f(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)\right]\ .$$
   En déduire la transformée de Laplace $G$ de la fonction $g$.

**Partie B.**

Soit un système "entrée-sortie" représenté par le schéma : $\xrightarrow{x(t)}$ $\boxed{\text{Système}}$ $\xrightarrow{y(t)}$

où $e$ et $s$ sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie, nuls pour $t$ négatif et admettant des transformées de Laplace notées $E$ et $S$.

La fonction de transfert du système est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.

Dans cet exercice la fonction de transfert $H$ est donnée par : $H(p) = \dfrac{p}{2p^2+2p+1}$ et la fonction $e$ est un "créneau" défini par : $e(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\pi)$.

1. Déterminer la transformée de Laplace $E$ de la fonction $e$.
2. Vérifier que : $2p^2+2p+1 = 2\left[\left(p+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}\right]$ et calculer $S(p)$. En déduire l'expression de $s(t)$.
   (On pourra pour cela utiliser les résultats de la partie A.).