Traitement du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG — Troisième Bimestre 1999/00

Séance 12 : — 3 avril 2000

La Transformée en Z

Formule du Jour :

$$\boxed{X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}}$$

Formule du Jour : La transformée en Z

Défnition : Soit un signal discrèt x(n).

La transformée en Z (bilatérale) est définie par

$$\boxed{X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}}$$

ou z est une variable complexe et où X(z) est un fonction complexe de la variable z.

La transformé en z peut être considéré comme une généralisation de la transformation de Fourier à laquelle elle peut s'identifier dans un cas particulier.

La transformée en z constitue l'outil privilégie pour l'étude des systèmes discrets. Elle joue un rôle équivalent à celui de la transformée de Laplace.

Par exemple, la transformée en z permet de représenter un signal possédant un infinité d'échantillons par un ensemble fini de nombre.

Domaine de Convergence :

Le transformée en z n'a pas de sens que si l'on précise le domaine des valeurs de z pour lesquelles cette série existe : son région de convergence.

Pour un signal donnée, l'ensemble de valeur de z pour lequelles la série converge est appellé "région de convergence".

Considére une série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_o + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

Une série de ce type converge si

$$\lim_{n \to \infty} \{ |u_n|^{1/n} \} < 1$$

Pour appliquer ce critère, on peut decomposer la série de X(z) en deux séries.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\ z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\ z^{-n} = X_1(z) + X_2(z)$$

$X_2(z)$ converge si $\lim\limits_{n\to\infty} \{ \mid x(n)\, z^{-n} \mid^{1/n} \} < 1$

Soit $R_{z-} = \lim\limits_{n\to\infty} \{ \mid x(n) \mid^{1/n} \}$. Alors $X_2(z)$ converge si $|z| > R_{z-}$

Pour $X_1(z)$, on fait un changement de variables m = -n

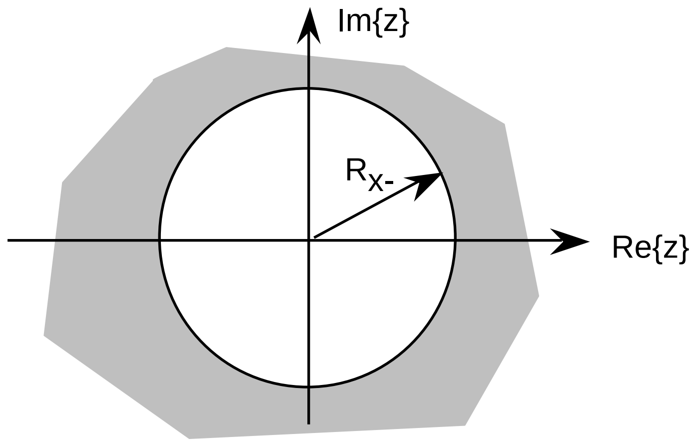
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\ z^{-n} \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} x(-m)\ z^{m}$$

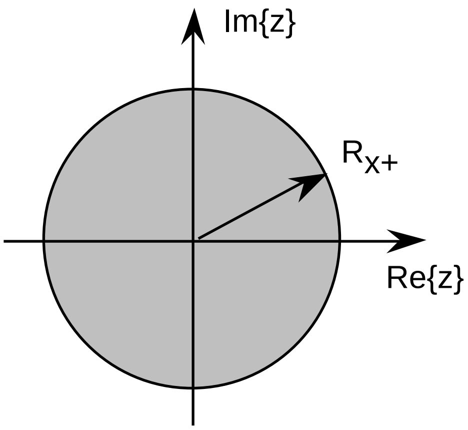
et $X_1(z)$ converge pout | z | < R_{x+}

$$R_{x+} = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} |(x-m)|^{1/m}]}$$

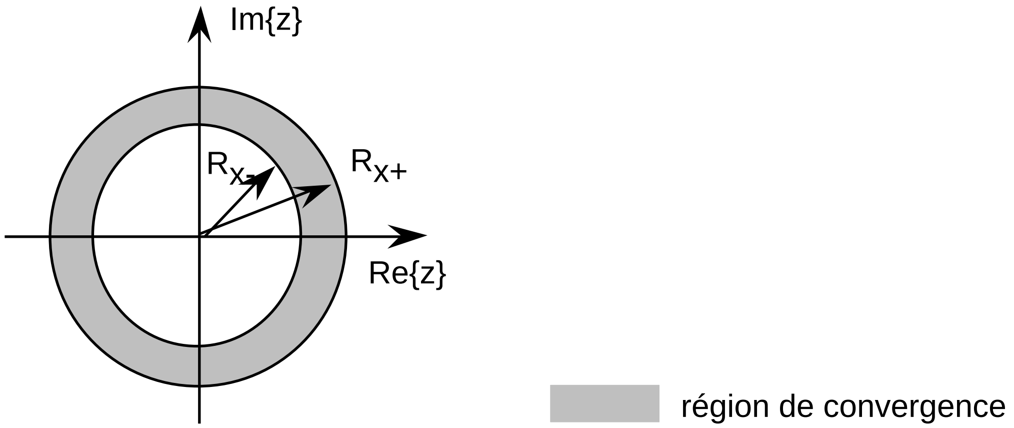
Ainsi la domaine de convergence de X(z) est en général dans un anneau du plan complexe des z donné par constitué de l'intersection des domaines de convergences. Si cette intersection existe, on a une coronne de convergence :

$$0 \leq R_{x-} < |z| < R_{x+} \leq \infty$$





Domains de convergence pour $X_1(z)$ Domaines de convergence pour $X_2(z)$



Exemples

a) L'impulsion unité : $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$X(z) = Z[\delta(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n)\, z^{-n} = 1$$

Avec convergence pour tout z.

b) L'échelon unité $u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$Z[u(n)] = U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Avec convergence pour $| z | > 1$. Donc $R_{x-} = 1$ $R_{x+} = \infty$

Démonstration :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n} - z^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n} \right) = (1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots) - z^{-1}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots)$$

$$(1 - z^{-1})\left(\sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n} \right) = 1 - z^{-\infty} = 1$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(n)\, z^{-n} = \frac{1 + z^{-\infty}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Note que la racine de la denominator est $|z| = 1$.
Il s'agit d'un "pôle" du U(z).
La domaine de convergence est borné par le plus grand pole.

c) La Rampe : $r(n) = \begin{cases} n & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)\, z^{-n} = 1\, z^{-1} + 2\, z^{-2} + \ldots = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

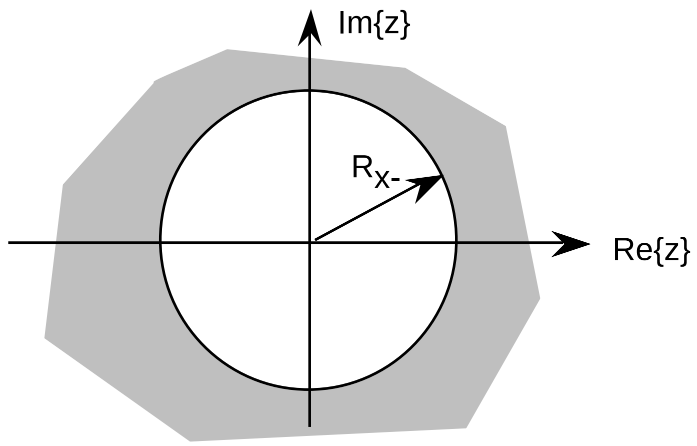
Convergence pour $|z| > 1$ $R_{X-} = 1$ et $R_{X+} = \infty$

d) Exponentiel $x(n) = a^n\, u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n\, u(n)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\, a\, z^{-1}\,)^n = \frac{1}{1-a\, z^{-1}}$$

Avec convergence pour $|z| > |a|$

On a $R_{X-} = |a|$ et $R_{X+} = \infty$



e) Exponentiel $x(n) = a^n$

$R_{X-} = |a|$ et $R_{X+} = |a|$ et donc la serie ne converge pas.

Les Propriétés de la Transformée en Z

Propriété de Linéarité

soit $x(n) = a\, x_1(n) + b\, x_2(n)$

Alors $X(z) = a\, X_1(z) + b\, X_2(z)$ avec convergence au moins dans les régions de convergence de $X_1(z)$ et $X_2(z)$.

$R_{x-} = \max\{ R_{x_1-}, R_{x_2-}\}$
$R_{x+} = \min\{ R_{x_1+}, R_{x_2+}\}$

Si les zéros éventuels introduits par la combinaison linéaire compensent certain pôles, la région de convergence de $X(z)$ peut être plus grande.

Décalage d'un signal

si $y(n) = x\,(n - n_o)$

alors $Y(z) = z^{-n_o} X(z)$ pour $R_{x-} < |z| < R_{x+}$

Commentaires :

Le produit d'un transformée en z par z^{-1} correspond à un retard unité $n_o = 1$.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow x(n-1)$$

Dérivée de la transformée en z

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)\; x(n)\; z^{-n-1}$$

en multipliant les deux coté par –z on obtient

$$-z\,\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\; x(n)\; z^{-n}$$

La derivée d'une tranformée en z multiplié par -z
est la transformtion en z du signal multiplié par le signal y(n) = n.

Convolution de deux signaux discret

La convolution est définie par

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\; y(n-k)$$

La transformé en z est $Z\{x(n) * y(n)\} = X(z)\,Y(z)$

Intercorrélation de deux signaux

L'intercorrélation est définie par $\phi_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\ y(k+n)$

La transformé en z est $\Phi_{xy}(z) = X(\frac{1}{z})\ Y(z)$

Lien avec l'échantillonage

Soit $x_e(n)$, les échantillons d'un signal x(t).

$$x_e(n) = x(t) \cdot \delta_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T)\ \ \delta(t-n\Delta T)$$

La spectre d'un signal échantillonné est fournie pour les valeurs discrèt de fréquence, $f = \frac{k}{\Delta T}$, par le formule sommatoire de Poisson :

$$\frac{1}{\Delta T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{k}{\Delta T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta T)\ \ e^{-j2\pi fn\Delta T}$$

On peut définir $z = e^{-j2\pi f\Delta T}$ et obtenir $H(z) = H(f)\Big|_{z\,=\,e^{-j2\pi f\Delta T}}$

Représentation par pôles et zéros

Considérons H(z) = Z{h(n)}.
Les pôles de H(z) sont les valeurs de z pour lesquelles H(z) tend vers l'infini.
Les zéros de H(z) sont les valeurs de z pour lesquelles H(z) est null.

Si X(z) possède M zéros z_m et N pôles, p_n, on peut la mettre sous la forme :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}} = A \frac{\prod_{m=1}^{M} (z - z_m)}{\prod_{n=1}^{N} (z - p_n)}$$

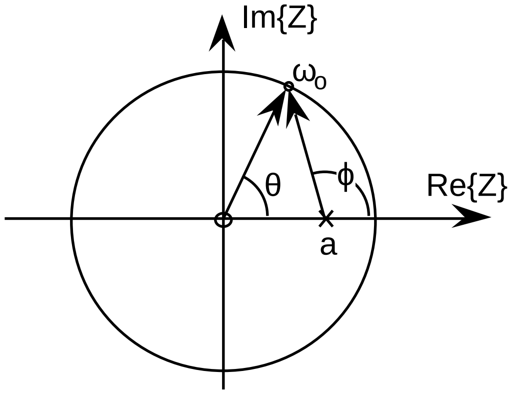
On peut toujours écrire une transformée en z sous cette forme, et représenter le signal par les listes de pôles et zéros.

Les zéros et les pôles complexes de H(z) sont du type $\alpha \pm j\beta$.

Exemple : considérons $h(n) = a^n u(n)$. (avec $|a| < 1$)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

Donc un zéro pour $z_1 = 0$ et un pôle pour $p_1 = a$.



On note que $z = r\, e^{j\omega}$
Donc, La transformé de Fourier est une transformée de z pour lesquelle $|z| = 1$.

$$H(\omega_o) = A \frac{e^{j\omega_o}}{e^{j\omega_o} - a}$$

La numérateur est un vecteur joignant l'origine au point $z = e^{j\omega_o}$
La dénominateur est la différance de deux vecteurs.

La module de $X(\omega_o)$ est la rapport des modules de $|e^{j\omega_o}|$ et $|e^{j\omega_o} - a|$
La phase et la différence d'angles fait par ce deux vecteurs avec l'axe réel.

On note que la module est proportional à l'inverse de la distance avec
la pôle (parce que la zéro est à l'origine.

Transformation en Z inverse

Il y a 3 methodes :

- Relation Intégrale
- Développement en série de Puissance
- Développement par division

Relation Intégrale

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} X(z)\ z^{n-1}\ dz$$

Valable pour tout les valeur de n, le contour d'intégration Γ doit être dans la région de convergence.
Il doit être fermé et il foi entourer l'origine du plan des z dans le sens positif (sens invers des aiguilles d'une montre).

On evalue l'intégrale par la méthode des résidus. La théoreme de Cauchy sur l'intégrale le long d'un contour indique que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma} X(z)\ z^{n-1}\ dz = \Sigma \text{ résidus de } X(z)\ z^{n-1} \text{ dans } \Gamma.$$

à un pôle (z=a) d'ordre 1, la résidu du fonction $[X(z)\ z^{n-1}]$ est donnée par

$$\mathrm{Res}_a^1 = \lim_{z \to a} \left\{ (z - a)\ X(z)\ x^{n-1} \right\}$$

à un pôle (z=a) d'ordre q, la fonction $[X(z)\ z^{n-1}]$ est donnée par

$$\mathrm{Res}_a^q = \lim_{z \to a} \left\{ \frac{1}{(q-1)!} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \{ X(z)\ x^{n-1}\ (z-a)^q \} \right\}$$

En calculant tous les résidus aux pôles de la contion $[X(z)\ z^{n-1}]$ à l'intérieur du contour Γ, on obtient par sommation le signal x(n).

Developpement en série de Puissance

Comme la transformé X(z) est une fonction analytique de z dans la région de convergence, on peut développe en série de Taylor en fonction de z^{-1}.

On peut, ensuite, trouver les series par identification avec les series connu.

Exemple :

Considérons une transformée en z

$$X(z) = \exp\{z^{-1}\}\ (1 + z^{-1})$$

Le dévelopement en série de Taylor donne :

$$X(z) = \exp\{z^{-1}\}\ (1 + z^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}\ z^{-n}$$

on comparant sa avec la définition d'une transformée en z, on deduit

$$x(n) = \frac{(n+1)}{n!}\ u(n)$$

Développement par division

Une grande classe de transformée peut se mettre sour la forme :

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\prod_{m=1}^{M}(z-z_m)}{\prod_{n=1}^{N}(z-p_n)}$$

Les racines de P(z) sont des racines de X(z), Les racines de Q(z) sont de poles de X(z). La région de convergence ne contient aucun pôle.

Afin de connaître les coefficients de x(n) on fait le division afin d'obtenir :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N} x(n)\ z^{-n}$$